Buku Guru

MATEMATIKA

Kelas
X

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika : buku guru / Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.—
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2013.
xxii, 426 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk Kelas X
ISBN 978-602-282-026-0(jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-027-7 (jilid 1)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan J.N.M.S. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Sudianto Manulang, Lasker Pengarapan Sinaga, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito dan Sisworo.
Penyelia Penerbitan : Politeknik Negeri Media Kreatif, Jakarta.

Cetakan Ke-1, 2013
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian di atas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas X untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan dan penyempurnaan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Mei 2013

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

Surat Buat Guru

Bapak, Ibu guru kami yang terhormat, banyak hal yang sudah kita lakukan sebagai usaha membelajarkan peserta didik dengan harapan, mereka berketuhanan, berperikemanusiaan, berpengetahuan, dan berketerampilan melalui pendidikan matematika. Harapan dan tugas mulia ini cukup berat, menuntut tanggung jawab yang tidak habis-habisnya dari generasi ke generasi.

Banyak masalah pembelajaran matematika yang kita hadapi, bagaikan menelusuri sebuah lingkaran dengan titik-titik masalah yang tak berhingga banyaknya. Tokoh pendidikan matematika Soedjadi dan Yansen Marpaung menyatakan, kita harus berani memilih/menetapkan tindakan dan menghadapi resiko untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika di setiap sekolah tempat guru melaksanakan tugas profesionalitasnya. Artinya, guru sebagai orang yang pertama dan yang utama bertindak sebagai pengembang kurikulum yang mengenal karakteristik siswa dengan baik, dituntut bekerjasama memikirkan jalan keluar permasalahan yang terjadi. Pola pembelajaran yang bagaimana yang sesuai dengan karakteristik matematika dan karakteristik peserta didik di sekolah Bapak/Ibu ?.

Salah satu alternatif, kita akan mengembangkan pembelajaran matematika berbasis paham konstruktivisme. Buah pikiran ini didasari prinsip bahwa: (1) setiap anak lahir di bumi, mereka telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi budaya, (3) matematika adalah produk budaya, yaitu hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia. Untuk itu diperlukan perangkat pembelajaran, media pembelajaran, asesmen otentik dalam pelaksanaan proses pembelajaran di kelas.

Model pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik yang relevan dengan karakteristik matematika dan tujuan pembelajaran matematika cukup banyak, seperti (1) model pembelajaran berbasis masalah, (2) pembelajaran kontekstual, (3) pembelajaran kooperatif dan banyak model pembelajaran lainnya. Bapak/Ibu dapat mempelajarinya secara mendalam melalui aneka sumber pembelajaran.

Pokok bahasan yang dikaji dalam buku petunjuk guru ini, antara lain: (1) eksponen dan logaritma, (2) persamaan dan pertidaksamaan linier, (3) sistem persamaan dan pertidaksamaan linier, (4) matriks, (5) relasi dan fungsi, (6) barisan dan deret, (7) persamaan dan fungsi kuadrat, (8) limit dan (9) peluang yang tertera dalam kurikulum 2013. Berbagai konsep, aturan dan sifat-sifat dalam matematika ditemukan melalui penyelesaian masalah nyata, media pembelajaran, yang terkait dengan materi yang diajarkan. Seluruh materi yang diajarkan berkiblat pada pencapaian kompetensi yang ditetapkan dalam kurikulum matematika 2013. Semua petunjuk yang diberikan dalam buku ini hanyalah pokok-pokoknya saja. Oleh karena itu, Bapak dan Ibu guru dapat mengembangkan dan menyesuaikan dengan keadaan dan suasana kelas saat pembelajaran berlangsung.

Akhirnya, tidak ada gading yang tak retak. Rendahnya kualitas pendidikan matematika adalah masalah kita bersama. Kita telah diberi talenta yang beragam, seberapa besar buahnya yang dapat kita persembahkan padaNya. Taburlah rotimu di lautan tanpa batas, percayalah kamu akan mendapat roti sebanyak pasir di tepi pantai. Mari kita lakukan tugas mulia ini sebaik-baiknya, semoga buku petunjuk guru ini dapat digunakan dan bermanfaat dalam pelaksanaan proses pembelajaran matematika di sekolah.

Jakarta, Pebruari 2013

Tim Penulis

DAFTAR ISI

DESKRIPSI SINGKAT MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS KONSTRUKTIVISTIK

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini, dilandasi teori pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik yang memberi perhatian pada aspek-aspek kognisi dan mengangkat berbagai masalah *real world* yang sangat mempengaruhi aktifitas dan perkembangan mental siswa selama proses pembelajaran dengan prinsip bahwa, (1) setiap anak lahir di bumi, mereka telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi nilai budayanya, (3) matematika adalah hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia.

Pembelajaran matematika yang diharapkan dalam praktek pembelajaran di kelas adalah (1) pembelajaran berpusat pada aktivitas siswa, (2) siswa diberi kebebasan berpikir memahami masalah, membangun strategi penyelesaian masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, (3) guru melatih dan membimbing siswa berpikir kritis dan kreatif dalam menyelesaikan masalah, (4) upaya guru mengorganisasikan bekerjasama dalam kelompok belajar, melatih siswa berkomunikasi menggunakan grafik, diagram, skema, dan variabel, (5) seluruh hasil kerja selalu dipresentasikan di depan kelas untuk menemukan berbagai konsep, hasil penyelesaian masalah, aturan matematika yang ditemukan melalui proses pembelajaran.

Rancangan model pembelajaran yang diterapkan mengikuti 5 (lima) komponen utama model pembelajaran yang dijabarkan sebagai berikut.

1. Sintaks

Pengelolaan pembelajaran terdiri 5 tahapan pembelajaran, yaitu:

a. Apersepsi

Tahap apersepsi diawali dengan menginformasikan kepada siswa kompetensi dasar dan indikator yang akan dicapai siswa melalui pembelajaran materi yang akan diajarkan. Kemudian guru menumbuhkan persepsi positif dan motivasi belajar pada diri siswa melalui pemaparan manfaat materi matematika yang dipelajari dalam penyelesaian masalah kehidupan serta meyakinkan siswa, jika siswa terlibat aktif dalam merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan kehidupan siswa dengan strategi penyelesaian yang menerapkan pola interaksi sosial yang pahami siswa dan guru. Dengan demikian, siswa akan lebih baik menguasai materi yang diajarkan, informasi baru berupa pengetahuan lebih bertahan lama di dalam ingatan siswa, dan pembelajaran lebih bermakna sebab setiap informasi baru dikaitkan dengan apa

yang diketahui siswa dan menunjukkan secara nyata kegunaan konsep dan prinsip matematika yang dipelajari dalam kehidupan.

b. Interaksi Sosial di antara Siswa, Guru, dan Masalah

Pada tahap orientasi masalah dan penyelesaian masalah, guru meminta siswa mencoba memahami masalah dan mendiskusikan hasil pemikiran melalui belajar kelompok. Pembentukan kelompok belajar menerapkan prinsip kooperatif, yakni keheterogenan anggota kelompok dari segi karakteristik (kemampuan dan jenis kelamin) siswa, berbeda budaya, berbeda agama dengan tujuan agar siswa terlatih bekerjasama, berkomunikasi, menumbuhkan rasa toleransi dalam perbedaan, saling memberi ide dalam penyelesaian masalah, saling membantu dan berbagi informasi. Guru memfasilitasi siswa dengan buku siswa, Lembar Aktivitas Siswa (LAS) dan Asesmen Otentik. Selanjutnya guru mengajukan permasalahan matematika yang bersumber dari lingkungan kehidupan siswa. Guru menanamkan nilai-nilai matematis (jujur, konsisten, tangguh menghadapi masalah) dan nilai-nilai budaya agar para siswa saling berinteraksi secara sosio kultural, memotivasi dan mengarahkan jalannya diskusi agar lebih efektif, serta mendorong siswa bekerjasama.

Selanjutnya, guru memusatkan pembelajaran pada siswa dalam kelompok belajar untuk menyelesaikan masalah. Guru meminta siswa memahami masalah secara individu dan mendiskusikan hasil pemikirannya dalam kelompok, dan dilanjutkan berdialog secara interaktif (berdebat, bertanya, mengajukan ide-ide, berdiskusi) dengan kelompok lain dengan arahan guru. Antar anggota kelompok saling bertanya-jawab, berdebat, merenungkan hasil pemikiran teman, mencari ide dan jalan keluar penyelesaian masalah. Setiap kelompok memadu hasil pemikiran dan menuangkannya dalam sebuah LAS yang dirancang guru. Jika semua anggota kelompok mengalami kesulitan memahami dan menyelesaikan masalah, maka salah seorang dari anggota kelompok bertanya pada guru sebagai panutan. Selanjutnya guru memberi *scaffolding*, yaitu berupa pemberian petunjuk, memberi kemudahan pengerjaan siswa, contoh analogi, struktur, bantuan jalan keluar sampai saatnya siswa dapat mengambil alih tugas-tugas penyelesaian masalah.

c. Mempresentasikan dan Mengembangkan Hasil Kerja

Pada tahapan ini, guru meminta salah satu kelompok mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan memberi kesempatan pada kelompok lain memberi tanggapan berupa kritikan disertai alasan-alasan, masukan bandingan pemikiran. Sesekali guru mengajukan pertanyaan menguji pemahaman/penguasaan penyaji dan dapat ditanggapi oleh kelompok lain. Kriteria untuk memilih hasil diskusi kelompok yang akan dipresentasikan antara lain: jawaban kelompok berbeda dengan jawaban

dari kelompok lain, ada ide penting dalam hasil diskusi kelompok yang perlu mendapat perhatian khusus. Dengan demikian kelompok penyaji bisa lebih dari satu. Selama presentasi hasil kerja, guru mendorong terjadinya diskusi kelas dan mendorong siswa mengajukan ide-ide secara terbuka dengan menanamkan nilai *soft skill*.

Tujuan tahapan ini adalah untuk mengetahui keefektifan hasil diskusi dan hasil kerja kelompok pada tahapan sebelumnya. Dalam penyajiannya, kelompok penyaji akan diuji oleh kelompok lain dan guru tentang penguasaan dan pemahaman mereka atas penyelesaian masalah yang dilakukan. Dengan cara tersebut dimungkinkan tiap-tiap kelompok mendapatkan pemikiran-pemikiran baru dari kelompok lain atau alternatif jawaban yang lain yang berbeda. Sehingga pertimbangan-pertimbangan secara objektif akan muncul di antara siswa. Tujuan lain tahapan ini adalah melatih siswa terampil menyajikan hasil kerjanya melalui penyampaian ide-ide di depan umum (teman satu kelas). Keterampilan mengomunikasikan ide-ide tersebut adalah salah satu kompetensi yang dituntut dalam pembelajaran berdasarkan masalah, untuk memampukan siswa berinteraksi/berkolaborasi dengan orang lain.

d. Temuan Objek Matematika dan Penguatan Skemata Baru

Objek-objek matematika berupa model (contoh konsep) yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah dijadikan bahan inspirasi dan abstraksi konsep melalui penemuan ciri-ciri konsep oleh siswa dan mengkonstruksi konsep secara ilmiah. Setelah konsep ditemukan, guru melakukan teorema pengontrasan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh. Dengan mengajukan sebuah objek, guru meminta siswa memberi alasan, apakah objek itu termasuk contoh atau bukan contoh konsep.

Guru memberi kesempatan bertanya atas hal-hal yang kurang dipahami. Sesekali guru menguji pemahaman siswa atas konsep dan prinsip yang ditemukan, serta melengkapi hasil pemikiran siswa dengan memberikan contoh dan bukan contoh konsep. Berdasar konsep yang ditemukan/direkonstruksi, diturunkan beberapa sifat dan aturan-aturan. Selanjutnya siswa diberi kesempatan mengerjakan soal-soal tantangan untuk menunjukkan kebergunaan konsep dan prinsip matematika yang dimiliki.

e. Menganalisis dan Mengevaluasi Proses dan Hasil Penyelesaian Masalah

Pada tahapan ini, guru membantu siswa atau kelompok mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah, menguji pemahaman siswa dalam proses penemuan konsep dan prinsip. Selanjutnya, guru melakukan evaluasi materi akademik dengan pemberian kuis atau meminta siswa membuat peta konsep atau memberi tugas di rumah atau membuat peta materi yang dipelajari.

2. Sistem Sosial

Pengorganisasian siswa selama proses pembelajaran menerapkan pola pembelajaran kooperatif. Dalam interaksi sosio kultural di antara siswa dan temannya, guru selalu menanamkan nilai-nilai *soft skill* dan nilai matematis. Siswa dalam kelompok saling bekerjasama dalam menyelesaikan masalah, saling bertanya/ berdiskusi antara siswa yang lemah dan yang pintar, kebebasan mengajukan pendapat, berdialog dan berdebat, guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa, bersifat membantu dan gotong royong) untuk menghasilkan penyelesaian masalah yang disepakati bersama. Dalam interaksi sosio kultural, para siswa diizinkan berbahasa daerah dalam menyampaikan pertanyaan, kritikan, pendapat terhadap temannya maupun pada guru.

3. Prinsip Reaksi

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini dilandasi teori konstruktivis dan nilai budaya dimana siswa belajar yang memberi penekanan pembelajaran berpusat pada siswa, sehingga fungsi guru sebagai fasilitator, motivator dan mediator dalam pembelajaran. Tingkah laku guru dalam menanggapi hasil pemikiran siswa berupa pertanyaan atau kesulitan yang dialami dalam menyelesaikan masalah harus bersifat mengarahkan, membimbing, memotivasi dan membangkitkan semangat belajar siswa.

Untuk mewujudkan tingkah laku tersebut, guru harus memberikan kesempatan pada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya secara bebas dan terbuka, mencermati pemahaman siswa atas objek matematika yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah, menunjukkan kelemahan atas pemahaman siswa dan memancing mereka menemukan jalan keluar untuk mendapatkan penyelesaian masalah yang sesungguhnya. Jika ada siswa yang bertanya, sebelum guru memberikan penjelasan/bantuan, guru terlebih dahulu memberi kesempatan pada siswa lainnya memberikan tanggapan dan merangkum hasilnya. Jika keseluruhan siswa mengalami kesulitan, maka guru saatnya memberi penjelasan atau bantuan/memberi petunjuk sampai siswa dapat mengambil alih penyelesaian masalah pada langkah berikutnya. Ketika siswa bekerja menyelesaikan tugas-tugas, guru mengontrol jalannya diskusi dan memberikan motivasi agar siswa tetap berusaha menyelesaikan tugas-tugasnya.

4. Sistem Pendukung

Agar model pembelajaran ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif, guru diwajibkan membuat suatu rancangan pembelajaran yang dilandasi teori pembelajaran konstruktivis dan nilai *soft skill* matematis yang diwujudkan dalam setiap langkah-langkah pembelajaran yang ditetapkan dan menyediakan fasilitas belajar yang cukup.

Dalam hal ini dikembangkan buku model yang berisikan teori-teori pendukung dalam melaksanakan pembelajaran, komponen-komponen model, petunjuk pelaksanaan dan seluruh perangkat pembelajaran yang digunakan seperti rencana pembelajaran, buku guru, buku siswa, lembar kerja siswa, objek-objek abstraksi dari lingkungan budaya, dan media pembelajaran yang diperlukan.

5. Dampak Instruksional dan Pengiring yang Diharapkan

Dampak langsung penerapan pembelajaran ini adalah memampukan siswa merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah dan terbiasa menyelesaikan masalah nyata dilingkungan siswa. Pemahaman siswa terhadap obek-objek matematika dibangun berdasarkan pengalaman budaya dan pengalaman belajar yang telah dimiliki sebelumnya. Kebermaknaan pembelajaran yang melahirkan pemahaman, dan pemahaman mendasari kemampuan siswa mentransfer pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah. Kemampuan menyelesaikan masalah tidak rutin menyadarkan siswa akan kebergunaan matematika. Kebergunaan akan menimbulkan motivasi belajar secara internal dari dalam diri siswa dan rasa memiliki terhadap matematika akan muncul sebab matematika yang dipahami adalah hasil rekonstruksi pemikirannya sendiri. Motivasi belajar secara internal akan menimbulkan kecintaan terhadap dewi matematika. Bercinta dengan dewi matematika berarti penyatuan diri dengan keabstrakan yang tidak memiliki batas atas dan batas bawah tetapi bekerja dengan simbol-simbol.

Selain dampak di atas, siswa terbiasa menganalisis secara logis dan kritis memberikan pendapat atas apa saja yang dipelajari menggunakan pengalaman belajar yang dimiliki sebelumnya. Penerimaan individu atas perbedaan-perbedaan yang terjadi (perbedaan pola pikir, pemahaman, daya lihat dan kemampuan), serta berkembangnya kemampuan berkolaborasi antara siswa. Retensi pengetahuan matematika yang dimiliki siswa dapat bertahan lebih lama sebab siswa terlibat aktif di dalam proses penemuannya.

Dampak pengiring yang akan terjadi dengan penerapan model pembelajaran berbasis konstruktivistik adalah siswa mampu menemukan kembali berbagai konsep dan aturan matematika dan menyadari betapa tingginya manfaat matematika bagi kehidupan sehingga dia tidak merasa terasing dari lingkungannya. Matematika sebagai ilmu pengetahuan tidak lagi dipandang sebagai hasil pemikiran dunia luar tetapi berada pada lingkungan budaya siswa yang bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan di lingkungan budayanya. Dengan demikian terbentuk dengan sendirinya rasa memiliki, sikap, dan persepsi positif siswa terhadap matematika dan budayanya. Siswa memandang bahwa matematika terkait dan inklusif di dalam budaya. Jika matematika bagian dari budaya siswa, maka suatu saat diharapkan siswa

memiliki cara tersendiri memeliharanya dan menjadikannya **Landasan Makna** (Landaan makna dalam hal ini berpihak pada sikap, kepercayaan diri, cara berpikir, cara bertingkah laku, cara mengingat apa yang dipahami oleh siswa sebagai pelaku-pelaku budaya). Dampak pengiring yang lebih jauh adalah hakikat tentatif keilmuan, keterampilan proses keilmuan, otonomi dan kebebasan siswa, toleransi terhadap ketidakpastian dan masalah-masalah non rutin.

PEDOMAN PENYUSUNAN RENCANA PEMBELAJARAN

Penyusunan rencana pembelajaran berpedoman pada kurikulum matematika 2013 dan sintaksis Model Pembelajaran. Berdasarkan analisis kurikulum matematika ditetapkan hal-hal berikut

1. Kompetensi dasar dan indikator pencapaian kompetensi dasar untuk tiap-tiap pokok bahasan. Rumusan indikator dan kompetensi dasar harus disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, memberikan pengalaman belajar bagi siswa, seperti menyelesaikan masalah autentik (masalah bersumber dari fakta dan lingkungan budaya), berkolaborasi, berbagi pengetahuan, saling membantu, berdiskusi dalam menyelesaikan masalah.
2. Materi pokok yang akan diajarkan, termasuk analisis topik, dan peta konsep (contoh disajikan di bawah).
3. Materi prasyarat, yaitu materi yang harus dikuasai oleh siswa sebagai dasar untuk mempelajari materi pokok. Dalam hal ini perlu dilakukan tes kemampuan awal siswa.
4. Kelengkapan, yaitu fasilitas pembelajaran yang harus dipersiapkan oleh guru, misalnya: rencana pembelajaran, buku petunjuk guru, buku siswa, lembar aktivitas siswa (LAS), objek-objek budaya, kumpulan masalah-masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa, laboratorium, dan alat peraga jika dibutuhkan.
5. Alokasi waktu: banyak jam pertemuan untuk setiap pokok bahasan tidak harus sama tergantung kepadatan dan kesulitan materi untuk tiap-tiap pokok bahasan. Penentuan rata-rata banyak jam pelajaran untuk satu pokok bahasan adalah hasil bagi jumlah jam efektif untuk satu semester dibagi banyak pokok bahasan yang akan diajarkan untuk semester tersebut.
6. Hasil belajar yang akan dicapai melalui kegiatan pembelajaran antara alain:

   Produk : Konsep dan prinsip-prinsip yang terkait dengan materi pokok

Proses : Apersepsi budaya, interaksi sosial dalam penyelesaian masalah, memodelkan masalah secara matematika, merencanakan penyelesaian masalah, menyajikan hasil kerja dan menganalisis serta mengevaluasi kembali hasil penyelesaian masalah.

Kognitif : Kemampuan matematisasi, kemampuan abstraksi, pola pikir deduktif, berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, dan berpikir kreatif).

Psikomotor : Keterampilan menyelesaikan masalah, ketrampilan berkolaborasi, kemampuan berkomunikasi.

Afektif : Menghargai budaya, penerimaan individu atas perbedaan yang ada, bekerjasama, tangguh menghadapi masalah, jujur mengungkapkan pendapat dan senang belajar matematika.

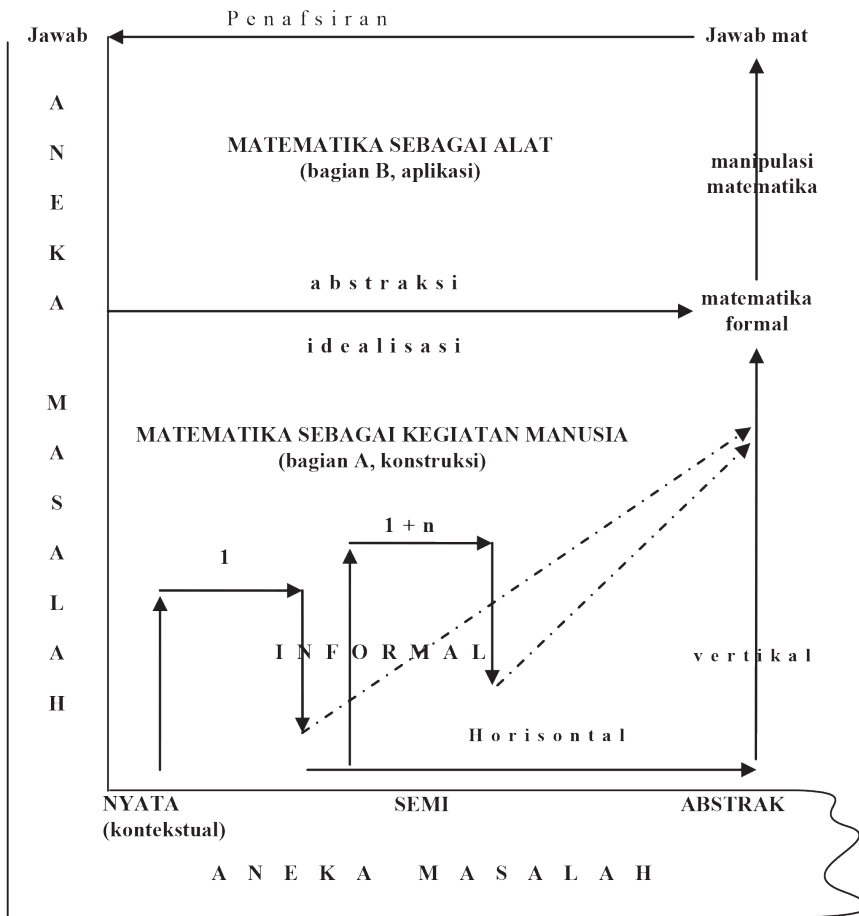
Sintaksis pembelajaran adalah langkah-langkah pembelajaran yang dirancang dan dihasilkan dari kajian teori yang melandasi model pembelajaran berbasis konstruktivistik. Sementara, rencana pembelajaran adalah operasional dari sintaks. Sehingga skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks). Sintaks model pembelajaran terdiri dari 5 langkah pokok, yaitu: (1) apersepsi budaya, (2) orientasi dan penyelesaian masalah, (3) persentase dan mengembangkan hasil kerja, (4) temuan objek matematika dan penguatan skemata baru, (5) menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah. Kegiatan yang dilakukan untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut:

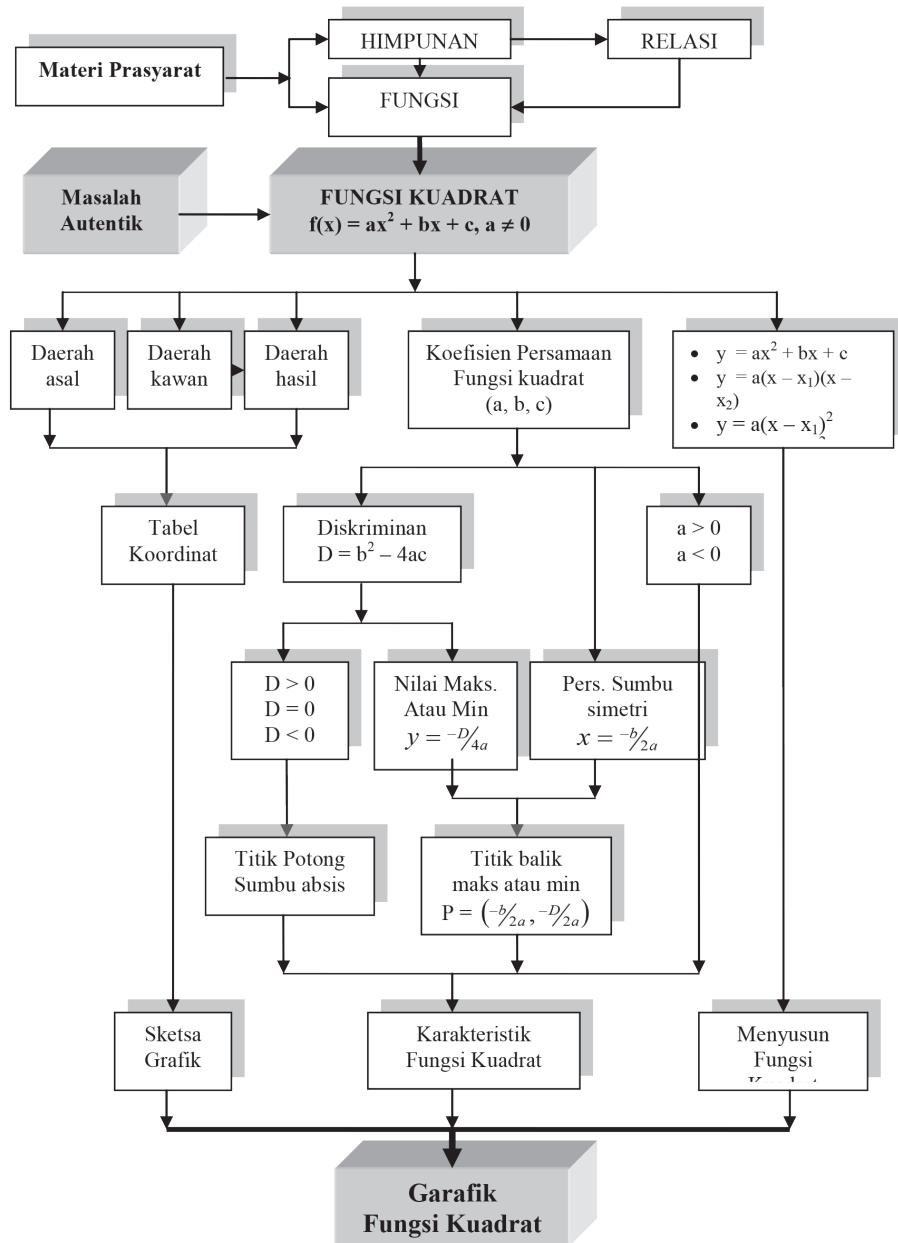
1. Kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya antara lain:
   a. Menginformasikan indikator pencapaian kompetensi dasar.
   b. Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial.
   c. Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah.
   d. Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, *soft skill* dan kebergunaan matematika.
   e. Memberi kesempatan pada siswa menanyakan hala-hal yang sulit dimengerti pada materi sebelumnya.

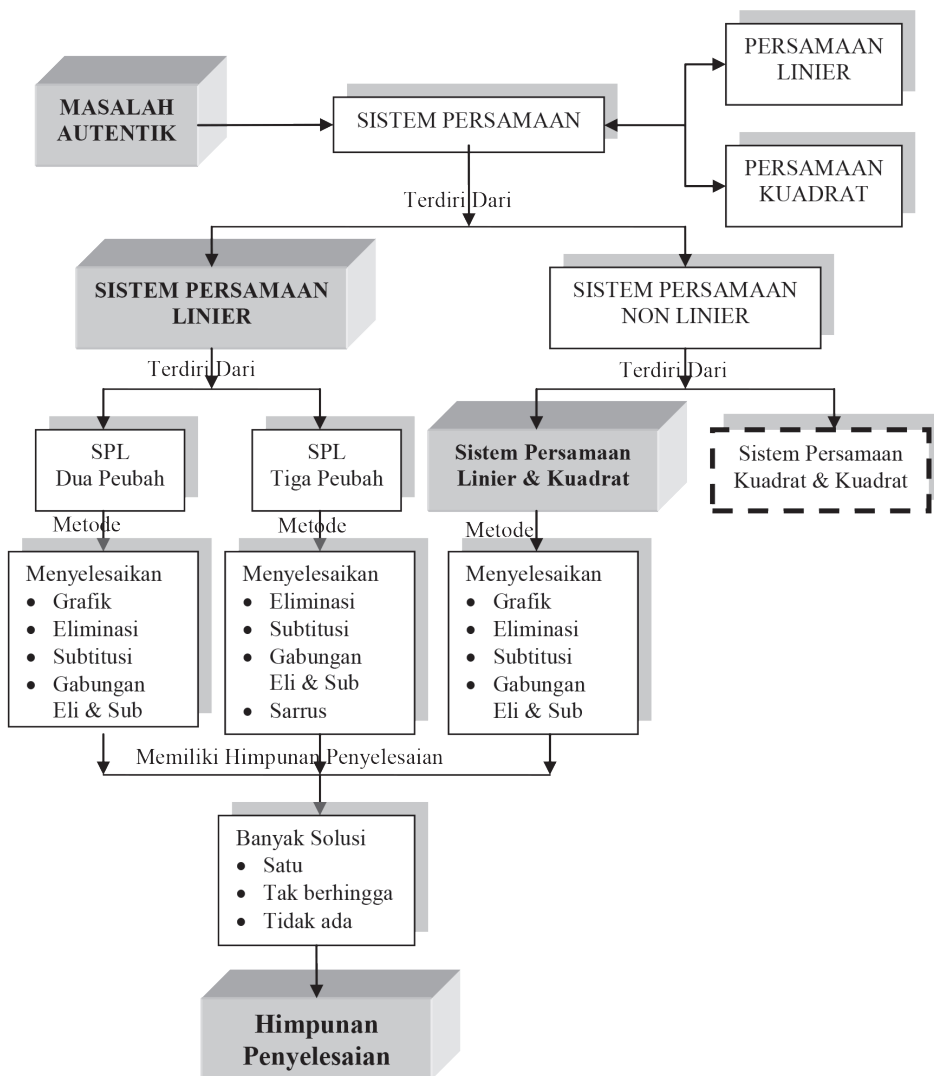
2. Kegiatan guru pada tahap penyelesaian masalah dengan pola interaksi edukatif antara lain:
   a. Membentukan kelompok
   b. Mengajukan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa

c. Meminta siswa memahami masalah secara individual dan kelompok
d. Mendorong siswa bekerjasama menyelesaikan tugas-tugas
e. Membantu siswa merumuskan hipotesis (dugaan).
f. Membimbing, mendorong/mengarahkan siswa menyelesaikan dan mengerjakan LKS
g. Memberikan *scaffolding* pada kelompok atau individu yang mengalami kesulitan
h. Mengkondisikan antar anggota kelompok berdiskusi, berdebat dengan pola kooperatif
i. Mendorong siswa mengekspresikan ide-ide secara terbuka
j. Membantu dan memberi kemudahan pengerjaan siswa dalam menyelesaikan masalah dalam pemberian solusi

3. Kegiatan guru pada tahap persentasi dan mengembangkan hasil kerja antara lain:
   a. Memberi kesempatan pada kelompok mempresentasikan hasil penyelesaian masalah di depan kelas
   b. Membimbing siswa menyajikan hasil kerja
   c. Memberi kesempatan kelompok lain mengkritisi/menanggapi hasil kerja kelompok penyaji dan memberi masukan sebagai alternatif pemikiran. Membantu siswa menemukan konsep berdasarkan masalah
   d. Mengontrol jalannya diskusi agar pembelajaran berjalan dengan efektif
   e. Mendorong keterbukaan, proses-proses demokrasi
   f. Menguji pemahaman siswa
4. Kegiatan guru pada tahap temuan objek matematika dan penguatan skemata baru antara lain:
   a. Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah
   b. Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep
   c. Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas-tugas belajar yang berkaitan dengan masalah
   d. Memberi kesempatan melakukan konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan
   e. Memberikan *scaffolding*
5. Kegiatan guru pada tahap menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah antara lain:
   a. Membantu siswa mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah
   b. Memotivasi siswa untuk terlibat dalam penyelesaian masalah yang selektif
   c. Mengevaluasi materi akademik: memberi kuis atau membuat peta konsep atau peta materi.

FASE KONSTRUKSI MATEMATIKA

Gambar: Matematika Hasil Konstruksi Sosial (Adaptasi, Soedjadi (2004)

CONTOH ANALISIS TOPIK

Gambar: Analisis Topik Pada Materi Fungsi Kuadrat

CONTOH PETA KONSEP

Gambar: Peta Konsep Pada Materi Sistem Persamaan Linier dan Kuadrat

PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS X
MASALAH OTENTIK
MATEMATIKA
ABSTRAKSI PIKIRAN
GEOMETRI
TRIGONOMETRI
ALJABAR
KALKULUS
STATISTIKA
OPERASI
OBJEK MATEMATIKA
FAKTA
PROSEDUR
KONSEP
PRINSIP
BILANGAN
HIMPUNAN
BANGUN DATAR DAN RUANG
PENGUKURAN
Eksponen dan Logaritma
RELASI
Statistika
Peluang
Persamaan dan Pertidaksamaan
FUNGSI
Kedudukan Titik, Garis, Sudut pada Bidang dan Ruang
Limit Fungsi
OPERASI
Sistem Persamaan Linier & Pertidaksamaan Linier
Barisan dan Deret
Sinus, Cosinus, Tangen dan Grafiknya
Matriks
Persamaan dan Fungsi Kuadrat
KETERANGAN:
adalah materi prasyarat yang dipelajari di SD dan SMP
adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika
adalah pokok bahasan yang dipelajari
adalah bidang kajian matematika
adalah keterkaitan secara hirarkis matematika

Bab 1

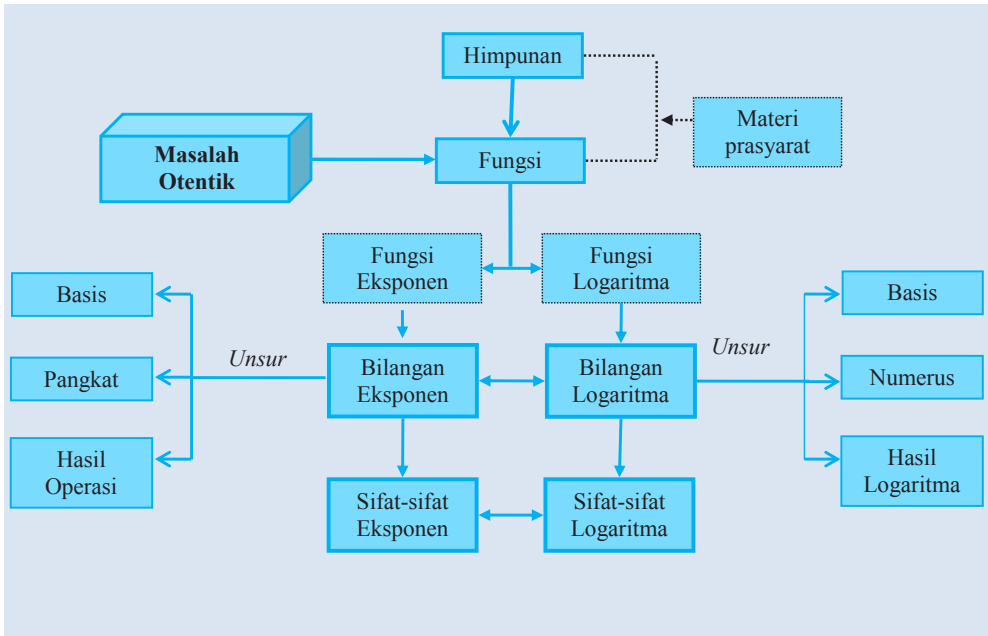
Eksponen dan Logaritma

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran eksponen dan logaritma siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memilih dan menerapkan aturan eksponen dan logaritma sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya; 3. menyajikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat-sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.	Melalui pembelajaran materi eksponen dan logaritma, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait eksponen dan logaritma; • merancang model Matematika dari sebuah permasalahan autentik yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma; • menyelesaikan model Matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan; • menafsirkan hasil pemecahan masalah; • membuktikan berbagai sifat terkait eksponen dan logaritma; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya; • membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma berdasarkan konsep yang sudah dimiliki; • menerapkan berbagai sifat eksponen dan logaritma dalam pemecahan masalah.

Istilah Penting

- *Bilangan Pokok (Basis)*
- *Perpangkatan*
- *Eksponen*
- *Logaritma*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Banyak permasalahan kehidupan yang penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD/MI, SMP/MTs, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Pegang teguh sifat matematika; yaitu, matematika bersandar pada kesepakatan, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, dan bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi; artinya, tidak boleh ada di dalamnya unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, rumus-rumus yang saling bertentangan. Jika sebuah konsep ditemukan, ukuran kebenarannya adalah apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

1. Menemukan Konsep Eksponen

Untuk menemukan konsep eksponen, kamu selesaikan masalah yang disajikan di bawah ini secara berkelanjutan. Kamu lebih dahulu berusaha memikirkan, berupaya mencari ide-ide kreatif, berdiskusi, mencoba memecahkan masalah di dalam kelompok belajar. Dari beberapa model matematika yang melibatkan eksponen, kamu secara individu menuliskan ciri-ciri eksponen dan mendiskusikan hasilnya dengan temanmu. Berdasarkan ciri-ciri tersebut, kamu menuliskan konsep eksponen dengan pemahaman sendiri.

Masalah-1.1

Seorang peneliti bidang mikrobiologi di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tersebut, satu bakteri membelah menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Peneliti tersebut ingin mengetahui banyak bakteri sebagai hasil pembelahan dan mencari tahu banyak bakteri dalam waktu 8 jam.

- *Ajukan masalah pada siswa dengan membagikan Lembar Aktivitas Siswa (LAS). Arahkan siswa memahami masalah dan meminta siswa menuliskan informasi yang diketahui dalam masalah dan menuliskan apa yang ditanyakan.*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Satu bakteri membelah menjadi r bakteri untuk setiap jam.

Jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlahnya menjadi 40.000 bakteri.

Ditanya:

a. Berapa banyak bakteri sebagai hasil pembelahan.

b. Berapa jumlah bakteri dalam waktu 8 jam.

- *Meminta siswa membuat tabel laju pertumbuhan bakteri terhadap waktu setiap jam. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyak bakteri hasil pembelahan pada saat waktu tertentu. Diharapkan siswa menuliskan hal berikut.*

Penyelesaian:

Misalkan jumlah bakteri pada awalnya ($t = 0$) adalah x_0. Isilah tabel berikut!

Jam ke-t	0	1	....	....	....	....
Jumlah bakteri (x_t)	x_0	rx_0	....	....	....	....

- *Organisasikan siswa belajar dalam kelompok dengan banyak anggota kelompok 4-5 orang untuk mendiskusikan model matematika yang ditemukan secara individu. Guru menjembatani perbedaan hasil pemikiran antar siswa dalam setiap kelompok dan menuliskan hasil pemikiran bersama pada LAS.*

Dari hasil pengamatan data pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan pertumbuhan jumlah bakteri (x_t) tersebut terhadap perubahan waktu (t).

$x_t = \underbrace{r \times r \times r \times \ldots \times r}_{t \text{ faktor}} \times x_0$ atau secara ringkas ditulis

$$x_t = r^t x_0 \quad \ldots\ldots (1)$$

dengan t dalam jam, x_0 adalah jumlah bakteri saat $t = 0$ dan r adalah banyak bakteri setelah pembelahan terjadi pada setiap jam.

Pada Masalah-1.1 diketahui bahwa pada akhir 3 jam terdapat 10.000 bakteri dan setelah 5 jam terdapat 40.000 bakteri. Kita substitusi ke formula di atas, maka

diperoleh $x_3 = r^3x_0 = 10.000$ dan $x_5 = r^5x_0 = 40.000$

$$\frac{x_5}{x_3} = \frac{40.000}{10.000}$$

$$\frac{r^5x_0}{r^3x_0} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa 1 bakteri membelah menjadi 2 bakteri untuk setiap 15 menit.

Untuk mendapatkan banyak bakteri pada awalnya atau $t = 0$, substitusi $r = 2$ ke persamaan $r^3x_0 = 10.000$ sehingga $8x_0 = 10.000$. Dengan demikian $x_0 = 1.250$.

Subtitusikan $x_0 = 1.250$ ke persamaan (1), pola pertumbuhan bakteri tersebut dinyatakan

$$x_t = 1250.2^{\frac{t}{15}}$$

$$x_8 = (2^8)(1250)$$

$$= 320.000$$

Dalam Masalah-1.1, ditemukan $r^2 = 4$ maka $r = 2$. Apakah $r = -2$ tidak berlaku? Minta siswa memberi alasan.

Jadi, setelah 8 jam, peneliti mendapatkan jumlah bakteri sudah mencapai 320.000 bakteri.

- *Guru meminta salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan kelompok siswa yang lain untuk memberi tanggapan terhadap hasil kerja kelompok penyaji. Jembatani jika ada cara yang berbeda hasil kerja di antara kelompok atau di antara siswa.*
- *Ajukan Masalah 1.2 dan memfasilitasi siswa terhadap alat yang dibutuhkan.*

Masalah-1.2

Diberikan selembar kertas berbentuk persegi panjang. Lipatlah kertas tersebut di tengah-tengah sehingga garis lipatan membagi dua bidang kertas menjadi dua bagian yang sama. Temukanlah pola yang menyatakan hubungan banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

- *Meminta siswa membuat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyak lipatan kertas dan banyak bidang kertas yang terbentuk. Diharapkan siswa menuliskan hal berikut*

Alternatif Penyelesaian

Tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Banyak Lipatan	Banyak Bidang Kertas	Pola Perkalian
1	2	2 = 2
2	4	4 = 2 × 2
3	8	8 = 2 × 2 × 2
4	...	...
5	...	...
N	...	...

- *Meminta beberapa siswa mempersentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan memita siswa lain menanggapi hasil pemikiran temannya. Selanjutnya guru meminta siswa mengamati dan mencermati data pada tabel. Diharapkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyaknya bidang kertas dengan banyaknya lipatan.*

Berdasarkan tabel di atas, misalkan k adalah banyak bidang kertas yang terbentuk sebagai hasil lipatan bidang permukaan kertas menjadi dua bagian yang sama, n adalah banyak lipatan.
k dapat dinyatakan dalam n, yaitu
$k_n = 2^n$ .... (2)

- *Meminta siswa menguji kebenaran persamaan $k_n = a^n$ dengan mensubtitusikan nilai n dan a ke persamaan tersebut.*

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh
Dari persamaan (1) $x_t = r^t x_0$, r adalah bilangan pokok dan t adalah eksponen dari r.
Dari persamaan (2) $k_n = a^n$, a adalah bilangan pokok dan n adalah eksponen dari a.
Untuk menyederhanakan penulisan hasil kali bilangan yang sama, kita dapat menggunakan *notasi pangkat*. Bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. a^n adalah hasil kali bilangan a sebanyak n faktor, dapat ditulis $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ faktor}$ dengan a sebagai *basis* bilangan pokok dan n sebagai pangkat.

Catatan:

1. Pada Definisi-1.1 di atas, kita sepakati, a^1 cukup ditulis a.
2. Hati-hati dengan bilangan pokok $a = 0$, tidak semua a^0 dengan a bilangan real hasilnya adalah 1. Coba tanyakan pada gurumu, mengapa demikian?
3. Jika n adalah sebuah variabel (variabel sebagai eksponen dari a), maka perlu dicermati semestanya dimana variabel itu dibicarakan. Sebab $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ sebanyak n faktor, ini hanya berlaku ketika semesta $n \in N$.

Perhatikan Masalah-1.3 berikut!

Masalah-1.3

Suatu zat yang disuntikkan ke dalam tubuh manusia akan dikeluarkan dari darah melalui ginjal. Setiap 1 jam separuh zat itu dikeluarkan oleh ginjal. Bila 100 mg zat itu disuntikkan ke tubuh manusia, berapa miligram zat itu yang tersisa dalam darah setelah:

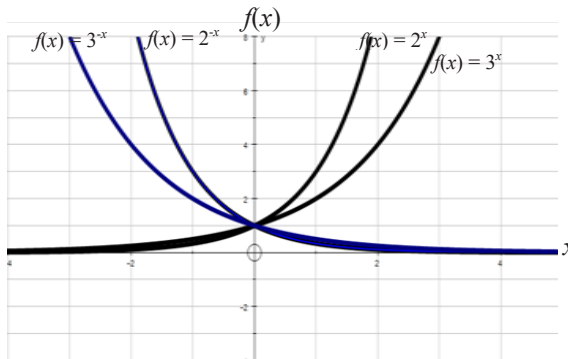
1) t = 1 jam?
2) t = 2 jam?
3) t = 3 jam?
4) Buatlah model matematika pengurangan zat tersebut dari tubuh melalui ginjal!
5) Gambarlah grafik model persamaan yang ditemukan!

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal isilah tabel berikut:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
Jumlah zat $z(t)$	50	25	12,5	...	...	...	...	...

- *Meminta siswa melengkapi data pada tabel dan mencoba menggambarkan pasangan titik-titik tersebut pada sistem koordinat kartesius!*

Selanjutnya perhatikan grafik fungsi (Gambar 1.1) di bawah ini. Isilah nilai-nilai yang dilalui fungsi tersebut dan sajikan nilai-nilai tersebut pada tabel yang diberikan.

Gambar 1.1 Grafik fungsi eksponen

	x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 2^{-x}$								
$f(x) = 3^x$								
$f(x) = 3^{-x}$								

- *Organisasikan siswa belajar dalam kelompok. Minta siswa menuliskan paling sedikit 5 (lima) sifat grafik fungsi eksponen dan hasil kerja kelompok disajikan di depan kelas.*

Latihan 1.1

Amati grafik di atas. Tuliskan sedikitnya 5 (lima) sifat grafik fungsi eksponen dan presentasi hasilnya di depan kelas. Dalam paparan jelaskan mengapa kita perlu mengetahui sifat-sifat tersebut!

Definisi 1.2

Fungsi Eksponen adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $y = f(x) = a(b^{cx})$ dengan a, b, dan c bilangan real.
x adalah variabel
b adalah bilangan pokok atau basis
c adalah koefisien x
cx adalah eksponen dari b.

2. Pangkat Bulat Negatif

Definisi 1.3

Untuk a adalah bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, didefinisikan

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Definisi di atas dijelaskan sebagai berikut:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}\right)}_{sebanyak\ m\ faktor}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= \frac{1}{a^m}$$

Contoh 1.1

Jika nilai $x = -2$ dan $y = 2$, tentukan nilai $x^{-3}\left(y^4\right) = \ldots$.

Penyelesaian:

$$x^{-3}\left(y^4\right) = \frac{y^4}{x^3} = \frac{2^4}{(-2)^3} = \frac{16}{-8} = -2$$

3. Pangkat Nol

Definisi 1.4

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan pola hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut dengan bilangan 0.

$2^3 = 8$ $\quad$ $3^3 = 27$

$2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$

$2^1 = 2$ $\quad$ $3^1 = 3$

$2^0 = 1$ $\quad$ $3^0 = 1$

Perhatikan hasil pemangkatan 2 dengan 0, dan hasil pemangkatan 3 dengan 0, hasil pemangkatannya adalah 1.

4. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Coba buktikan sifat-sifat pangkat bulat positif menggunakan definisi bilangan berpangkat yang telah dipelajari sebelumnya.

Sifat-1

Jika a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a}_{m+n}$$

$$= a^{m+n}$$

- Perhatikan $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}$.

  Diskusikan dalam kelompokmu, apakah benar perpangkatan adalah perkalian berulang?
- Bagaimana jika a bukan bilangan?
- Bagaimana jika m dan n bukan bilangan bulat positif?

Sifat-2

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n\ faktor}} \text{ (sesuai definisi)}$$

- Pada persyaratan Sifat-2, Apa arti $a \neq 0$?
- Bagaimana jika $a = 0$? Apa dampaknya pada hasil pembagian? $\frac{a^m}{a^n}$? Jika kamu tidak tahu, tanya pada guru!

Pada Sifat-1 di atas, terkait bilangan bulat positif m dan n. Ada 3 (tiga) kemungkinan, yaitu (a) $m > n$, (b) $m = n$, dan (c) $m < n$.

a) Kasus $m > n$

Jika m dan n bilangan bulat positif dan $m > n$ maka $m - n > 0$. Dengan demikian

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n\ faktor}} = \frac{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{n\ faktor}} \left(\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{(m-n)\ faktor}\right)$$

$$= \underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{(m-n)\ faktor}$$

$$= a^{m-n}$$

Jadi $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$, dengan m, n bilangan bulat positif dan $m > n$

b) Kasus $m = n$

Jika $m = n$, maka $\frac{a^m}{a^n} = 1$.

Bukti:

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}$, sebab $m = n$

$$= \frac{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{m\ faktor}}{\underbrace{a\times a\times a\times \ldots \times a}_{m\ faktor}}$$

$= 1$

$= a^0$ (hal ini sesuai dengan Definisi 1.4).

$= a^{m-n}$

Latihan 1.2

Buktikan sendiri untuk $m < n$. Jelaskan perbedaan hasilnya dengan kasus (a).

Sifat-3

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n adalah bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n\ faktor}$$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}\right)\ldots\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}\right)}_{n\ faktor}$$

$$= \left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \times n\ faktor}\right)$$

$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$ (terbukti)

Definisi 1.4

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif. $a^{\frac{1}{m}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^m = a$.

Diskusi

Minta siswa berdiskusi dengan temannya satu kelompok, apakah syarat *m* dan *n* bilangan positif diperlukan untuk Sifat 3 dan Sifat 4. Bagaimana jika *m* dan *n* adalah salah satu atau keduanya bilangan negatif.

Contoh 1.2

(a) Buktikan jika $a \in R$, $a > 1$ dan $n > m$, maka $a^n > a^m$!

Bukti:

Karena $a > 1$ dan $n > m$ maka $n - m > 0$ dan $a^n > 0$, $a^m > 0$. Akibatnya, berlaku

$\Leftrightarrow \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Lihat Sifat-1 di atas)

$\Leftrightarrow \quad \frac{a^n}{a^m} > 1$ (Mengapa $\frac{a^n}{a^m} > 1$? Beri alasanmu!)

$\Leftrightarrow \quad \frac{a^n}{a^m} \times a^m > 1 \times a^m$ (Karena $a^m > 0$)

$\Leftrightarrow \quad a^n > a^m$ (terbukti)

(b) Perlukah syarat $a > 1$?

Misalkan kita ambil a bilangan real yang memenuhi $a < 1$ dan $n > m$. Apakah yang terjadi?

Pilih $a = -2$, dengan $n > m$, pilih $n = 3$ dan $m = 2$, apakah yang terjadi?

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

Dengan demikian, $a^n = -8 < 4 = a^m$ atau $a^n < a^m$. Jadi, tidak benar bahwa $a^n > a^m$ bila $a < 1$ dan $n > m$. Jadi, syarat a adalah bilangan real, dan $a > 1$ dan $n > m$ tidak boleh dikurangi (syarat cukup) untuk membuktikan $a^n > a^m$.

Diskusi

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok. Analisis pernyataan pada Contoh 1.2!

- Apa akibatnya bila syarat $a > 1$ tidak dipenuhi?
- Perlukah diperkuat dengan syarat $n > m > 0$? Jelaskan!
- Bolehkah syarat $a > 1$ di atas diganti $a \geq 1$? Jelaskan!
- Bila tidak boleh, modifikasi ketentuan di atas supaya berlaku untuk $a \geq 1$. Bagaimanakah bila $0 < a < 1$ dan $a < 0$?
- Buat aturan hubungan antara a^n dan a^m untuk bermacam-macam nilai a di atas!
- Buat laporan terkait hasil diskusi kelompokmu.

Contoh 1.3

Terapkan berbagai sifat eksponen untuk menentukan hasil operasi bilangan pada soal yang disajikan pada contoh. Ujilah kebenaran hasilnya!

1. $$2^2 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{2\ faktor} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5\ faktor}$$ dengan menggunakan Sifat-1
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7\ faktor}$$
$$= 2^7$$
$$= 2^{2+5}$$

2. $$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 1$$ dengan menggunakan Sifat-2 kasus b
$$= 2^0$$

3. $$\left(2^3\right)^2 = \left(2^3\right) \times \left(2^3\right)$$ dengan menggunakan Sifat-3
$$= \underbrace{\left(2 \times 2 \times 2\right)}_{3\ faktor} \times \underbrace{\left(2 \times 2 \times 2\right)}_{3\ faktor}$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6\ faktor}$$
$$= 2^6$$

4. $$\left(2 \times 3\right)^3 = \left(2 \times 3\right) \times \left(2 \times 3\right) \times \left(2 \times 3\right)$$ dengan menggunakan Definisi 1.1
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3\ faktor} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3\ faktor}$$
$$= 2^3 \times 3^3$$

5. $$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)$$ dengan menggunakan Definisi 1.1
$$= \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2}^{3\ faktor}}{\underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3\ faktor}}$$
$$= \frac{2^3}{3^3}$$

Diskusi

- Arahkan siswa berdiskusi dengan temannya untuk memperoleh rumus perpangkatan sebagai hasil pemahaman terhadap Contoh 1.4 dan Contoh 1.5 di atas. Masih ingatkah kamu, disebut sifat apakah dalam konsep perkalian?
- Minta siswa membuat laporan hasil diskusi kelompoknya.

Contoh 1.4

Buktikan jika $a > 1$ dan $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif maka $a^n > a^m$.

Bukti:

Karena $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $-n$ dan $-m$ adalah bilangan bulat positif dan $-m > -n$.

Karena $a > 1$ maka $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}} = \dfrac{a^n}{a^m} > 1$ (Gunakan sifat $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$).

$\dfrac{a^n}{a^m} > 1 \Leftrightarrow a^n > a^m$ (terbukti)

Contoh 1.5

Berdasarkan sifat bilangan 7, tentukan bilangan satuan dari 7^{1234} tanpa menghitung tuntas. Perhatikan bilangan satuan dari perpangkatan dari 7 berikut?

Perpangkatan 7	Nilai	Bilangan Satuan
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9
7^7	823543	3
7^8	5764801	1

- *Minta siswa melanjutkan langkah berikutnya untuk menemukan satuan dari 71234. Cermati sifat satuan pada tabel di atas, saat periode keberapa berulang. Selanjutnya manfaatkan sifat-sifat perpangkatan dan perkalian dari bilangan berpangkat.*

Bilangan tersebut mempunyai bilangan satuan yang berulang untuk periode 4 sehingga, kita dapat operasikan:
$7^{1234} = 7^{(4 \times 308 + 2)}$.
Dengan menggunakan sifat eksponen, maka kita peroleh:
$7^{1234} = 7^{(4 \times 308)} \times 7^2$ Ingat: $a^{m+n} = a^m$ x a^n
$7^{1234} = (7^4)^{308} \times 7^2$ Ingat: $a^{m \times n} = (a^m)^n = (a^n)^m$
$7^{1234} = (7^4)^{308} \times 7^2$
sehingga satuan dari $[7^{1234}]$ = satuan dari $[(7^4)^{308} \times 7^2]$
Satuan dari $[7^{1234}]$ = satuan dari $[(1)^{308}] \times$ satuan dari $[7^2]$
Satuan dari $[7^{1234}]$ $= 1 \times 9$
Satuan dari $[7^{1234}]$ $= 9$
Jadi, angka terakhir dari 71234 adalah 9.
Demikian juga bila 7 diganti dengan angka yang lain [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9]

5. Pangkat Pecahan

Selanjutnya kita akan analisis sifat perpangkatan bilangan real dengan pangkat pecahan.

Definisi 1.5

Misalkan *a* bilangan real dan *a* ≠ 0, *m*, *n* bilangan bulat positif didefinisikan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Definisi 1.6

Misalkan *a* bilangan real dan $a \neq 0$ dengan *a* > 0, $\frac{p}{q}$ adalah bilangan pecahan $q \neq 0$. $q \geq 2$. $a^{\frac{p}{q}} = c$, sehingga $c = \sqrt[q]{a^p}$ atau $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Sifat-4

Misalkan a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$. Jika $n, q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Bukti:
Berdasarkan Sifat-4, jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n adalah bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dengan demikian $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p \Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m+p \text{ faktor}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m+p} = (a)^{\frac{m+p}{n}}$$ (Ingat Definisi 1.5) (terbukti)

Jadi, jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan dengan $n \neq 0$, serta n, $q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Sifat-5

Jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{q}$ bilangan pecahan $q, n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Uji Kompetensi 1.1

1. Sederhanakanlah operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $2^5 \times 2^9 \times 2^{12}$
   b. $2^5 \times 3^6 \times 4^6$
   c. $\dfrac{2^5 \times 3^5 \times 4^2}{12^2}$
   d. $\dfrac{(-5)^6 \times 25^2}{125}$
   d. $\dfrac{3^7 \times 7^3 \times 2}{(42)^3}$

2. Dengan menggunakan sifat bilangan berpangkat, sederhanakanlah bentuk berikut.
   a. $2x^3 \times 7x^4 \times (3x)^2$
   b. $\left(\dfrac{-2p}{q}\right)^3 \times (-q)^4 \times \dfrac{2}{5}p^2$
   c. $y^5 \times (x \times z)^3 \left(\dfrac{1}{x^2 \times y}\right)$
   d. $(a \times b \times c)^4 \times \dfrac{3}{(b \times c)^3} \times \dfrac{b^3}{27a^5}$
   e. $\dfrac{-4a^3 \times 2b^5}{\left(\dfrac{8a}{b}\right)}$
   f. $\dfrac{1}{x^2 y} \times \dfrac{2x}{3y^2} \times \dfrac{5}{3x} \times (4y)^2$
   g. $(-a \times b)^3 \times \left(\dfrac{-b}{2a}\right)^4 \times \left(\dfrac{3a}{b}\right)^5$
   h. $\left(\dfrac{24a^3 \times b^8}{6a^5 \times b}\right) \times \left(\dfrac{4b^3 \times a}{2a^3}\right)^2$
   i. $\left(\dfrac{36(x \times 2y)^2}{3x \times y^2}\right)^3 \div \left(\dfrac{12x(3y)^2}{9x^2 y}\right)^2$
   j. $\left(\dfrac{(-p)^3 \times (-q)^2 \times r^3}{-3(p^2 q)^3}\right) \div \left(\dfrac{2pqr^3}{-12(qr)^2}\right)$

3. Hitunglah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\right)^2$
   b. $(-5)^3 \times \left(\dfrac{1}{15}\right)^2 \times \left(\dfrac{10}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{9}{5}\right)^5$
   c. $\dfrac{3x^2 \times y^3}{24x} \times (2y)^2$; untuk $x = 2$ dan $y = 3$
   d. $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)(-y)^3}{xy^2}$; untuk $x = \dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{3}$
   e. $\dfrac{3p^2 q \times (-3)^4}{(-2p)^2 \times (-3q)^3} \times 4\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$; untuk $p = 4$ dan $q = 6$

4. Tentukan hasil dari
$$\frac{(2^{n+2})^2 - 2^2 \times 2^{2n}}{2^n \times 2^{n+2}}$$

5. Misalkan kamu diminta menghitung 7^{64}. Berapa banyak perkalian yang kamu lakukan untuk mendapatkan nilai akhirnya? Bandingkan jawabanmu dengan temanmu. Pemenang di antara kalian adalah yang dapat mencari hasilnya dengan melakukan perkalian sesedikit mungkin. Coba tuliskan prosedur mengalikan yang paling sedikit perkaliannya untuk menghitung 7^{64}. Apakah prosedur tersebut dapat dipergunakan untuk pangkat positif berapapun?

6. Berdasarkan sifat angka 7, tentukan bilangan satuan dari $7^{1234} + 7^{2341} + 7^{3412} + 7^{4123}$ tanpa menghitung tuntas!

7. Tentukan bilangan satuan dari $\left((6)^{26}\right)^{62}$ berdasarkan sifat angka 6, tanpa menghitung tuntas. Selanjutnya berdasarkan sifat angka 2, 3, 4, 5, 8, 9, tentukan juga angka satuan yang diperoleh bilangan-bilangan tersebut yang dipangkatkan.

8. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.

9. Bagaimana cara termudah untuk mencari $\dfrac{3^{2008}(10^{2013} + 5^{2012}.\ 2^{2011})}{5^{2012}(6^{2010} + 3^{2009}.\ 2^{2008})}$.

10. Hitunglah
$$\frac{1^{-4} + 2^{-4} + 3^{-4} + 4^{-4} + \ldots}{1^{-4} + 3^{-4} + 5^{-4} + 7^{-4} + \ldots} =$$

11. Sederhanakanlah $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}}b}$.

12. Tentukan nilai x yang memenuhi
    a. $2^x = 8$
    b. $4^x = 0{,}125$
    c. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 1$

Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kcil seringkali dituliskan dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai *a E b* yang nilainya adalah $a \times 10^b$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai 5,2 *E* 5. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen. Misalkan cepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai 3 *E* 8 m/det.

6. Bentuk Akar

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan inversi dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi "$\sqrt{\ }$".

- *Arahkan siswa masalah berikut untuk menunjukkan kepada siswa, kebergunaan mempelajari bentuk akar di bidang ekonomi. Diharapkan siswa memiliki motivasi belajar matematika.*

Perhatikan permasalahan berikut.

Masalah-1.4

Seorang ahli ekonomi menemukan bahwa harga (h) dan banyak barang (b) dapat dinyatakan dalam persamaan $h = 3\sqrt[3]{b^2}$. Jika nilai b = 8, maka berapa nilai h?

Alternatif Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
h = 3\sqrt[3]{b^2} \; &\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{8^2} \\
&\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{64} \\
&\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} \\
&\Leftrightarrow h = 12
\end{aligned}
$$

Akar ke-n atau akar pangkat n dari suatu bilangan a dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan a adalah bilangan pokok/basis dan n adalah indeks/eksponen akar.
Bentuk akar dan pangkat memiliki kaitan erat. Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal. Sedangkan, bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan. Bilangan irrasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irrasional, misalnya $\sqrt{2}$ = 1,414213562373..., e = 2,718..., π = 3,141592653… dan sebagainya.

Definisi 1.7

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar jika dan hanya jika hasil $\sqrt[n]{a}$ adalah bilangan irrasional.

Bilangan irrasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{\ }$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irrasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai $\sqrt{25}$ adalah 5 dan nilai $\sqrt{64}$ adalah 8, keduanya bukan bilangan irrasional.
Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ adalah bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27} = 3$

7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Berdasarkan Sifat-5, jika a adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$. Jika n, $q \geq 2$ maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = p^1 = p$ dan perhatikan bahwa

$\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$.

Perhatikan untuk kasus di bawah ini

$p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = p^1 = p$ dan perhatikan juga bahwa

$\sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 7.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{p}$.

Latihan 1.3

Cermatilah dan buktikan apakah berlaku secara umum bahwa $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} = p^2$, sehingga berdasarkan sifat perkalian bilangan berpangkat diperoleh:

$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^3 = p^2 \qquad \text{Ingat, } \left(p^m\right)^n = p^{m \times n}$$

Jadi, $p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ sebagaimana diberikan pada Definisi-6.

8. Operasi pada Bentuk Akar

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap p, q, dan r adalah bilangan real dan $r \geq 0$ berlaku sifat-sifat berikut.

$$p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p+q)\sqrt[n]{r}$$

$$p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p-q)\sqrt[n]{r}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.6

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut dalam bentuk yang sederhana!

1. $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5}$
   $= 7\sqrt{5}$
2. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)
3. $2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = (2-3)\sqrt[3]{4}$
   $= -\sqrt[3]{4}$
4. $3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} = (3-1)\sqrt[3]{x}$
   $= 2\sqrt[3]{x}$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Sifat perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.7

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$
2) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$
3) $4\sqrt[3]{5} \times 2\sqrt[3]{7} = (4 \times 2)(\sqrt[3]{5 \times 7}) = 8\sqrt[3]{35}$
4) $3\sqrt[5]{5} \times 5\sqrt[7]{5} = (3 \times 5)(5^{\frac{1}{5}} \times 5^{\frac{1}{7}}) = 15(5^{\frac{12}{35}}) = 15\sqrt[35]{5^{12}}$
5) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$
6) $\dfrac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$

Latihan 1.4

1) Buktikan: jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$
2) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $a\sqrt[n]{c} \times b\sqrt[n]{d} = ab\sqrt[n]{cd}$
3) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, $d \neq 0$, maka $\dfrac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[n]{\dfrac{c}{d}}$

c. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Kita tahu bahwa bentuk-bentuk akar seperti $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}, \sqrt{2} - \sqrt{6}$, dst merupakan bilangan irrasional. Jika bentuk akar tersebut menjadi penyebut pada suatu pecahan, maka dikatakan sebagai penyebut irasional.

Penyebut irrasional dapat diubah menjadi bilangan rasional. Cara merasionalkan penyebut suatu pecahan bergantung pada bentuk pecahan itu sendiri. Akan tetapi, prinsip dasarnya sama, yaitu mengalikan dengan bentuk akar sekawannya. Proses ini dinamakan *merasionalkan penyebut*.

1) **Merasionalkan bentuk** $\frac{p}{\sqrt{q}}$

Bentuk $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dirasionalkan dengan cara mengalikannya dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$.

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{q}$$

Diskusi

Menurutmu mengapa penyebut bilangan pecahan berbentuk akar harus dirasionalkan?

Mengapa kita harus mengalikan $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$?

Karena nilai $\sqrt{q}$ selalu positif, maka $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1$. Jadi perkalian $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ tidak akan mengubah nilai $\frac{p}{\sqrt{q}}$ namun menyebabkan penyebut menjadi bilangan rasional.

2) **Merasionalkan bentuk** $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$

Sebelum kita merasionalkan bentuk-bentuk akar di atas, perlu kita pahami bentuk-bentuk campuran bilangan rasional dan bilangan irrasional.

a) Jika bilangan rasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2+\sqrt{7} = 2 + 2{,}645751.... = 4{,}645751...$ (bilangan irrasional).
b) Jika bilangan irrasional dijumlahkan dengan bilangan irrasional maka hasilnya bilangan irrasional, Contoh (1) $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 2{,}236068.... +$

2,645575... = 4,881643... (bilangan irrasional) (2) $2\sqrt{5}$ + $(-2\sqrt{5})$ = 0 (bilangan rasional). Jika dua bilangan irrasional dikurangkan, bagaimana hasilnya?

c) Jika bilangan rasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya bilangan irrasional. Contoh $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

d) Jika Bilangan irrasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya dapat bilangan rasional atau bilangan irrasional.

Contoh:

- $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5} \times 5\sqrt{5} = 25$ (25 adalah bilangan rasional)
- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ adalah bilangan irrasional)

e) $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar apabila a adalah bilangan irrasional.

Untuk merasionalkan bentuk $\dfrac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\dfrac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\dfrac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\dfrac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

dapat dilakukan dengan memperhatikan sifat perkalian $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Sehingga

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=\left(\sqrt{p}\right)^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p-q$$

$$\left(p+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{q}\right)=p^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p^2-q$$

Bentuk $\left(p+\sqrt{q}\right)$ dan bentuk $\left(p-\sqrt{q}\right)$ saling sekawan, bentuk $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$ dan $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$ juga saling sekawan. Jika perkalian bentuk sekawan tersebut dilakukan maka dapat merasionalkan bentuk akar.

Contoh 1.8

Pikirkan cara termudah untuk menghitung jumlah bilangan-bilangan berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\ldots?$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara merasionalkan penyebut tiap suku; yaitu,

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ldots-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9.$$

Contoh 1.9

Berapakah nilai $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}}$

Perhatikan pola bilangan di ruas kanan. Misalkan,

$$P = \frac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}}$$

Dengan menguadratkan ruas kiri dan kanan, diperoleh

$$P^2 = \frac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}$$

$$P^2 = \frac{1}{3+P^2}$$

$$\Leftrightarrow P^2(3+P^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$$

Dengan mengubah ke bentuk kuadrat sempurna, diperoleh persamaan:

$$\Leftrightarrow (P^2 + \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(P^2 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}} \text{ atau } P = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$$

Dapatkah kamu selesaikan. Ingat materi persamaan kuadrat di SMP. $(P^2)^2 + 3P^2 - 1 = 0$ dengan rumus *abc* pada persamaan kuadrat?

$\left(P^2 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$ tidak memenuhi. Dapatkah kamu beri alasannya?

Jadi, nilai dari $\dfrac{1}{\sqrt{3 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{3 + \ldots}}}}$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{13} - 6}$

Contoh 1.10

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut.

a. $\dfrac{2}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3-\sqrt{2}} \times \dfrac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$= \frac{6}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

b. $\dfrac{3}{6+\sqrt{3}} = \dfrac{3}{6+\sqrt{3}} \times \dfrac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{3(6-\sqrt{3})}{\left(6+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{18 - 3\sqrt{3}}{36 - 3}$$

$$= \frac{18 - 3\sqrt{3}}{33}$$

$$= \frac{6}{11} - \frac{\sqrt{3}}{11}$$

c. $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{7 - 5}$$

$$= \frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$$

---

3) Menyederhanakan bentuk $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$

Sekarang kita akan menyederhanakan bentuk akar yang mempunyai bentuk khusus; yaitu, bentuk $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$. Perhatikan proses berikut ini!

Diskusikanlah masalah berikut dengan temanmu!

a. $\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)$

b. $\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)$

Dari hasil kegiatan yang kamu lakukan, kamu akan memperoleh bentuk sederhananya menjadi $\sqrt{(p+q) \pm 2\sqrt{pq}}$. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.11

Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\times3}} = \sqrt{5+2\sqrt{5\times3}+3}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

b. $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt{5}-2$

Uji Kompetensi 1.2

1. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\dfrac{5}{\sqrt{15}}$ d. $\dfrac{12}{\sqrt{24}}$

   b. $\dfrac{2}{\sqrt{20}}$ e. $\dfrac{15}{\sqrt{48}}$

   c. $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ f. $\dfrac{2a}{3\sqrt{a}}$

2. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\dfrac{1}{5-\sqrt{3}}$ d. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

   b. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ e. $\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   c. $\dfrac{2a}{3a+\sqrt{5}}$

   f. $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

3. Sederhanakanlah bentuk berikut ini!

   a. $\dfrac{15}{\sqrt{75}} - \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

   b. $\dfrac{7}{2+\sqrt{8}} + \dfrac{11}{2-\sqrt{8}}$

   c. $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   d. $\dfrac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dfrac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dfrac{14}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$

4. Jika $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = a+b\sqrt{6}$, tentukan nilai $a+b$!

5. Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

c. $\sqrt{43+12\sqrt{7}}$

d. $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$

e. $\sqrt{21+8\sqrt{5}}$

SOAL TANTANGAN

1. Tentukanlah nilai dari:

   a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{\ldots}}}}}}}$

   b. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}$

   c. $1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{\ldots}}}}}}$

2. Jika a,b adalah bilangan asli dan $a \leq b$ sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan (a,b) adalah ... (OSN 2005/2006)

3. Nyatakan b dalam a dan c pada $\dfrac{\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}{\sqrt{c\sqrt[3]{a}}} = abc.$

4. Bentuk $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$ dapat disederhanakan menjadi ....

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{1.000.000}+\sqrt{1.000.001}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

6. $\sqrt{54+14\sqrt{5}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}=$

7. Jika $(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = (4^x-3^y)$, maka $x-y = \ldots$

Projek

Tidak semua bilangan pecahan desimal tak hingga adalah bilangan irrasional. Sebagai contoh 0,333... bukanlah bilangan irrasional, karena dapat dinyatakan sebagai pecahan murni $\frac{1}{3}$. Kenyataannya, bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang seperti 0,333... dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.

a. Rancang sebuah prosedur untuk mengkonversi bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang menjadi bilangan pecahan. Beri contoh penerapan prosedur yang kamu rancang.

b. Berdasarkan penjelasan di atas π yang bilangan irrasional tidak mungkin sama dengan $\frac{22}{7}$, karena $\frac{22}{7}$ adalah pendekatan untuk nilai π sebenarnya.

   1) Berapakah kesalahan $\frac{22}{7}$ terhadap nilai π?

   2) Dengan menggunakan prosedur yang kamu rancang di atas cari pecahan yang lebih mendekati nilai π daripada $\frac{22}{7}$ (kesalahannya lebih kecil).

   3) Apakah lebih baik menggunakan angka yang kamu peroleh daripada menggunakan $\frac{22}{7}$

Buat laporan projek ini dan paparkan di depan kelas.

9. Menemukan Konsep Logaritma

Telinga manusia dapat mendengar suara dengan intensitas yang rentangnya luar biasa. Suara paling keras yang dapat didengar oleh orang yang sehat tanpa merusak gendang telinga memiliki intensitas 1 triliun (1.000.000.000.000) kali lebih kuat dari pada suara paling rendah yang bisa didengar.

Menghitung intensitas bunyi dengan rentang begitu besar tentu sangat tidak nyaman. Namun, dengan logaritma perhitungan ini akan menjadi lebih sederhana. Logaritma merupakan suatu operasi hitung. Alexander Graham Bell (1847–1922) menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi. Skala ini dinamakan *decibel*, dan didefinisikan sebagai $D = 10\log\frac{I}{I_0}$, dengan D adalah skala *decibel* bunyi, I adalah intensitas bunyi dengan satuan Watt per meter persegi $\left({}^{W}\!/_{m^2}\right)$, dan I_0 adalah intensitas bunyi paling minimum yang bisa didengar orang yang sehat, yaitu $1{,}0 \times 10^{-12}$. Sebagai gambaran, berikut ini adalah tabel intensitas bunyi beberapa objek.

Tabel 1.1 Intensitas bunyi beberapa suara

Intensitas Bunyi $\left({}^{W}\!/_{m^2}\right)$	Intensitas Bunyi
$1{,}0 \times 10^{-12}$	Ambang batas bawah pendengaran
$5{,}2 \times 10^{-10}$	Suara bisik-bisik
$3{,}2 \times 10^{-6}$	Percakapan normal
$8{,}5 \times 10^{-4}$	Lalu lintas padat
$8{,}3 \times 10^{2}$	Pesawat jet lepas landas

Banyak masalah kehidupan yang penyelesaiannya melibatkan berbagai aturan dan sifat logaritma. Cermatilah masalah berikut.

Masalah-1.5

Yusuf adalah seorang pelajar kelas X di kota Kupang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp1.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp1.464.100,00.

Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Buat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Selanjutnya temukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang.

Diketahui:

Modal awal (M_0) = 1.000.000 dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya:

Berapa tahun (t) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (M_t) = 1.464.100

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahun pada tabel sebagai berikut.

Tabel 1.2 Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun *t*

Akhir Tahun	Bunga uang (10% × Total Uang)	Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat *t*
0	0	Rp1.000.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^0$
1	Rp100.000,00	Rp1.100.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^1$
2	Rp110.000,00	Rp1.210.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^2$
3	Rp121.000,00	Rp1.331.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^3$
4	Rp133.100,00	Rp1.464.100,00	$1.000.000\ (1+0,1)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar uangnya menjadi Rp1.464.100,00. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membahas tentang pemangkatan suatu bilangan. Kita tahu bahwa 2^3 hasilnya adalah 8 yang dapat ditulis $2^3 = 8$. Sehingga bila ada persamaan $2^x = 8$, maka nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 3$.

Perhatikan Tabel-1.2 di atas, kita peroleh $1.464.100 = 1.000.000\ (1+0,1)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $1.464.100 = 1.000.000\ (1 + 0,1)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,1)$, $b = 1,464100$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$?

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan invers dari eksponen, yaitu logaritma. Logaritma, dituliskan sebagai "log", didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.8

Misalkan $a, b, c \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$ maka ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $a^c = b$.

dimana: a disebut basis ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)
b disebut numerus ($b > 0$)
c disebut hasil logaritma

Diskusi

Meminta siswa mendiskusikan dengan temannya. Mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Demikian juga dengan $b > 0$.

Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan bentuk-bentuk berikut.

- $2^x = 5 \Leftrightarrow x = {}^2\log 5$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)
- $3^y = 8 \Leftrightarrow y = {}^3\log 8$
- $5^z = 3 \Leftrightarrow z = {}^5\log 3$

Catatan:

- Jika logaritma dengan basis e (yaitu $e \approx 2{,}718\ldots$, e adalah bilangan *Euler*), maka ${}^e\log b$ ditulis ln b.
- Bilangan pokok (basis) 10 tidak ditulis, sehingga ${}^{10}\log a = \log a$.

Masalah-1.6

Di tahun 2013 jumlah penduduk Negara X adalah 100 juta orang. Bila pertambahan penduduk 1% per tahun, berapa jumlah penduduk negara itu pada akhir tahun 2017 dan tahun 2038? Pada tahun berapa penduduk negara itu menjadi dua kali lipat?

Diketahui:
Jumlah penduduk Negara X pada tahun 2013 adalah 100 juta jiwa.
Persentase pertambahan penduduk per tahun adalah 1%

Ditanya:
a) Jumlah penduduk pada tahun 2017 dan tahun 2038
b) Pada tahun berapa, jumlah penduduk menjadi dua kali lipat.

Penyelesaian

Jumlah penduduk di awal (P_0) = 100 juta
Misalkan: P_t adalah jumlah penduduk pada tahun t
r adalah persentase pertambahan penduduk.

Tabel 1.3 Perhitungan jumlah penduduk Negara X untuk setiap tahun

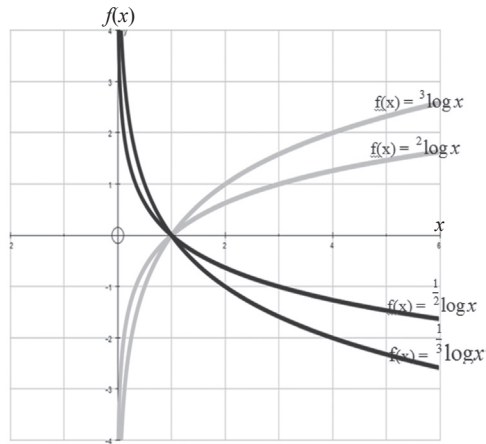
Akhir Tahun	Pertambahan penduduk (1% × total penduduk) (juta)	Total = Jumlah Penduduk awal + Pertambahan (juta)	Pola Total Penduduk pada saat t
2013	0	100	$100\ (1+0{,}01)^0$
2014	1	101	$100\ (1+0{,}01)^1$
2015	1,01	102,01	$100\ (1+0{,}01)^2$
2016	1,0201	103,0301	$100\ (1+0{,}01)^3$
2017	1,030301	104,060401	$100\ (1+0{,}01)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa total penduduk pada akhir tahun 2017 adalah 104.060.401. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Perhatikan Tabel-1.3 di atas, kita peroleh 104.060.401 = $100\ (1+0{,}01)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi 104.060.401 = $100\ (1+0{,}01)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0{,}01)$, $b = 104.060.401$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$? Selanjutnya bagaimana menentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2038 dan tahun berapa jumlah penduduk Negara X menjadi duakali lipat.

Diskusi

- Misalkan P_0 adalah jumlah penduduk pada saat t = 0, dan P_t adalah jumlah penduduk pada akhir tahun t, dan diketahui nilai $e \approx$ 2,718.... Berdiskusilah dengan teman dan guru, bagaimana menemukan hubungan P_t dengan P_0 sehingga $P_t = P_0\ (e^{rt})$.
- Ujilah pemahaman siswa, apakah siswa mengerti makna ketika t = 0, maka P_0 = 100 juta.

Selanjutnya cermati grafik fungsi $y = f(x) = {}^2\log x$, $f(x) = -{}^2\log x$, $f(x) = {}^3\log x$ dan $f(x) = -{}^3\log x$ yang disajikan berikut.

Gambar 1.2 Grafik Fungsi Logaritma

Berdasarkan grafik di atas dan definisi tentang logaritma, Minta siswa berdiskusi dengan temannya untuk mencari sedikitnya 5 sifat dari fungsi logaritma. Minta siswa menyajikan hasil diskusi di depan kelas.

Perhatikan grafik fungsi di atas. Isilah tabel berikut.

Tabel 1.4 Perhitungan Nilai Fungsi Logaritma

	x								
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	8	9
$f(x) = {}^2\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$				0					
$f(x) = {}^3\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$				0					

Mari kita definisikan fungsi logaritma.

Definisi 1.9

Fungsi Logaritma adalah suatu fungsi yang didefinisikan oleh $y = f(x) = {}^a\log x$ dengan a bilangan real, $a > 0$, $a \neq 1$ serta $x > 0$.
x adalah variabel (peubah bebas) dan a adalah bilangan pokok atau *basis*.

Contoh 1.12

1. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $2^5 = 32$ maka ${}^2\log 32 = 5$
   b. $4^3 = 64$ maka ${}^4\log 64 = 3$
   c. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ maka ${}^2\log \frac{1}{4} = -2$
2. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. ${}^{11}\log 121 = 2$ maka $11^2 = 121$
   b. ${}^3\log 81 = 4$ maka $3^4 = 81$
   c. $\log 1000 = 3$ maka $10^3 = 1000$
3. Hitunglah nilai logaritma berikut.
   a. ${}^2\log 2 = 1$ karena $2^1 = 2$
   b. ${}^2\log 1 = 0$ karena $2^0 = 1$
   c. ${}^2\log 128 = 7$ karena $2^7 = 128$

10. Sifat-sifat Logaritma

Dari Definisi 1.9, logaritma merupakan inversi dari perpangkatan, oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu:

Sifat-6. Sifat Dasar Logaritma

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka
1. ${}^a\log a = 0$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = n$

Sifat-sifat tersebut dapat diturunkan langsung dari definisi logaritma.

Contoh 1.13

1. ${}^{a}\log a = x \Leftrightarrow a^{x} = a$ sehingga $x = 1$ atau ${}^{a}\log a = 1$
2. ${}^{a}\log 1 = y \Leftrightarrow a^{y} = 1$. Karena $a^{0} = 1$, maka $y = 0$
3. ${}^{a}\log a^{n} = z \Leftrightarrow a^{x} = a^{n}$ sehingga $z = n$ serta ${}^{a}\log a^{n} = n$

BEBERAPA SIFAT OPERASI LOGARITMA

Sifat-7

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^{a}\log(b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

$${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$$

$${}^{a}\log c = y \Leftrightarrow c = a^{y}$$

- Simbol $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika
- Apakah kamu mengerti maknanya? Jika tidak bertanya kepada guru.

Dengan mengalikan nilai b dengan c, maka:

$$\begin{aligned} b \times c = a^{x} \times a^{y} \Leftrightarrow b \times c &= a^{x+y} \\ \Leftrightarrow {}^{a}\log (b \times c) &= x + y \quad \text{Substitusi nilai } x \text{ dan } y \\ \Leftrightarrow {}^{a}\log (b \times c) &= {}^{a}\log b + {}^{a}\log c \quad \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Sifat-8

Untuk a, b, dan c bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku

$${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.6, diperoleh:

${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

${}^{a}\log c = y \Leftrightarrow c = a^{y}$

Dengan membagikan nilai b dengan c, maka diperoleh

$$\frac{b}{c} = \frac{a^{x}}{a^{y}} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$$

$$\Leftrightarrow {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log a^{x-y}$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = x - y \qquad \text{Substitusi nilai } x \text{ dan } y$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-9

Untuk a, b, dan n bilangan real, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b^{n} = n\ {}^{a}\log b$$

Bukti:

$${}^{a}\log b^{n} = {}^{a}\log\left(\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\ faktor}\right) \qquad \text{ingat, } a^{m} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{a}\log b^{n} = \underbrace{{}^{a}\log b + {}^{a}\log b + \ldots + {}^{a}\log b}_{n\ faktor} \qquad \text{ingat, Sifat-10}$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{a}\log b^{n} = n\ {}^{a}\log b \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-10

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dan $c \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.8, diperoleh:

${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

Terdapat bilangan pokok c sedemikian sehingga:

$${}^{c}\log b = {}^{c}\log a^{x} \ \Leftrightarrow \ {}^{c}\log b = x\ {}^{c}\log a \qquad \text{ingat, Sifat-9}$$

$$\Leftrightarrow \ x = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \qquad \text{substitusi nilai } x$$

$$\Leftrightarrow \ {}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Karena c adalah bilangan sembarang dengan ketentuan di atas dapat dipenuhi $c = b$ sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} \qquad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{1}{{}^{b}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-11

Untuk a, b, dan c bilangan real positif dengan $a \neq 1$ dan $c \neq 1$, berlaku
${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Bukti:
Berdasarkan Definisi 1.6 maka diperoleh:

$${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$$
$${}^{b}\log c = y \Leftrightarrow c = b^{y}$$
$${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log a^{x} \times {}^{b}\log b^{y}$$
$$\Leftrightarrow {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b^{y} \qquad \text{ingat, } c = b^{y}$$
$$\Leftrightarrow {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\,{}^{a}\log b \times {}^{b}\log b \qquad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$
$$\Leftrightarrow {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\,{}^{a}\log b \qquad \text{ingat, Sifat 6}$$
$$\Leftrightarrow {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b^{y} \qquad \text{ingat, } c = b^{y}$$
$$\Leftrightarrow {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-12

Untuk a dan b bilangan real positif dengan $a \neq 1$, berlaku

${}^{a^{m}}\log b^{n} = \frac{n}{m}({}^{a}\log b)$, dengan m, n bilangan bulat dan $m \neq 0$.

Bukti: (Silahkan coba sendiri)

Sifat-13

Untuk a dan b bilangan real positif $a \neq 1$, berlaku $a^{{}^{a}\log b} = b$

Bukti: (coba sendiri)
Logaritma saling *invers* dengan eksponen. Misalkan ${}^{a}\log b = c$. Kita subtitusikan ${}^{a}\log b = c$ ke $a^{c} = (a)^{{}^{a}\log b}$, sehingga diperoleh $a^{c} = b$

Untuk mendalami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14

Mari kita tinjau kembali Masalah-1.5. Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep logaritma. Cermatilah kembali Tabel 1.2. Kita dapat menyatakan hubungan total jumlah uang untuk t tahun sebagai berikut:

$M_t = M_0 (1+i)^t$

dimana M_t : total jumlah uang diakhir tahun t

t : periode waktu

i : bunga uang

Dengan menggunakan notasi di atas, maka soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Diketahui : $M_0 = 1.000.000$, $M_t = 1.464.100$, $i = 0{,}1$

Ditanya : t

Penyelesaian

$1.464.100 = 1.000.000\,(1+0{,}1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log\,[1.000.000\,(1{,}1)^t\,]$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log 1.000.000 + \log\,(1{,}1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 - \log 1.000.000 = t \log 1{,}1$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1.464.100}{1.000.000} = t \log 1{,}1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{14.641}{10.000} = t \log 1{,}1$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{11}{10}\right)^4 = t \log 1{,}1$$

$\Leftrightarrow 4 \log\,(1{,}1) = t \log 1{,}1$

$\Rightarrow t = 4$

Jadi, Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mendapatkan uang sebesar Rp1.464.100,00.

Contoh 1.15

Misal $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $\log^2 a + \log a = 6$?

Penyelesaian

Misal $P = \log a$

$\log^2 a + \log a = 6 \Leftrightarrow (\log a)^2 + (\log a) = 6$

$\Leftrightarrow P^2 + P - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (P + 3)(P - 2) = 0$

$\Leftrightarrow P = -3$ atau $P = 2$

$\Leftrightarrow \log a = -3$ atau $\log a = 2$

$\Leftrightarrow a = 10^{-3}$ atau $a = 10^2$

Jadi, nilai a yang memenuhi persamaan di atas adalah $a = 0{,}001$ atau $a = 100$.

Contoh 1.16

Nyatakan b dalam a supaya berlaku ${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$!

Penyelesaian

${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$

Ingat, ${}^b\log a = \dfrac{1}{{}^a\log b}$

$\Leftrightarrow {}^a\log b - \dfrac{2}{{}^a\log b} - 1 = 0$

Misalkan: $P = {}^a\log b$

$\Leftrightarrow P - \dfrac{2}{P} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow P^2 - P - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (P + 1)(P - 2) = 0$

$\Leftrightarrow P = -1$ atau $P = 2$

$\Leftrightarrow {}^a\log b = -1$ atau ${}^a\log b = 2$

Sekarang akan kita nyatakan b dalam a, yaitu,

${}^a\log b = -1 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^{-1}$ atau ${}^a\log b = 2 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^2$

$\Leftrightarrow b = a^{-1}$ $\quad\quad \Leftrightarrow b = a^{-2}$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}$

Jadi, $b = \dfrac{1}{a}$ atau $b = a^{-2}$.

Uji Kompetensi 1.3

1. Pada awal tahun, Rony menabung uang di bank sebesar Rp125.000,00. Ia menyimpan uang tersebut selama 8 tahun. Berapa jumlah uang Rony pada akhir tahun ke delapan jika bank memberi suku bunga majemuk 6% setahun?
2. Pak Thomas menabung Rp2.000.000,00 selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, berapakah besar bunga yang diterima Pak Thomas?
3. Tentukan skala decibel suara berikut.
   a. Percakapan normal yang memiliki intensitas $3,2 \times 10^{-6}$ Watt per meter kuadrat.
   b. Pesawat jet yang baru lepas landas yang memiliki intensitas $8,3 \times 10^{2}$ Watt per meter kuadrat.
4. Gemuruh suara Air terjun Niagara memiliki skala decibel 90. Tentukan intensitas bunyi dari air terjun tersebut. Apakah intensitas tersebut masih aman untuk telinga manusia?
5. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $5^3 = 125$
   b. $10^2 = 100$
   c. $4^3 = 64$
   d. $6^1 = 6$
6. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. $\log 0,01 = -2$
   b. ${}^{0,5}\log 0,0625 = 4$
   c. ${}^{2}\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$
   d. ${}^{3}\log \frac{1}{9} = -2$
7. Hitunglah nilai dari:
   a. $\log 10^4$
   b. ${}^{5}\log 125$
   c. ${}^{3}\log \frac{1}{27}$
   d. ${}^{2}\log 0,25$
   e. ${}^{4}\log 4^{10}$
   f. ${}^{5}\log 1$
8. Diketahui $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ dan $\log 7 = 0,8451$ tentukan:
   a. $\log 18$
   b. $\log 21$
   c. $\log 10,5$
   d. $\log \frac{1}{7}$
9. Sederhanakan
   a. $\frac{2}{3} \times {}^{2}\log 64 - \frac{1}{2} \times {}^{2}\log 16$
   b. ${}^{a}\log 2x + 3\left({}^{a}\log x - {}^{a}\log y\right)$
   c. ${}^{a}\log \frac{a}{\sqrt{x}} - {}^{a}\log \sqrt{ax}$
   d. $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \frac{1}{2}\log ab$
10. Jika ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, nyatakan bentuk berikut dalam a dan b!
    a. ${}^{2}\log 15$
    b. ${}^{4}\log 75$

c. $^{25}\log 36$
d. $^{2}\log 5$
e. $^{30}\log 150$
f. $^{100}\log 50$

11. Jika $b = a^4$, a dan b bilangan real positif, tentukan nilai $^{a}\log b - {}^{b}\log a$!

12. Jika $^{a}\log b = 4$, $^{c}\log b = 4$ dan a, b, c bilangan positif, $a, c \neq 1$, tentukan nilai $\left[{}^{a}\log(bc)^4\right]^{\frac{1}{2}}$!

13. Buktikan log 1 = 0 dan log 10=1!

14. Buktikan bahwa untuk $a > b > 0$, $^{a}\log b < 0$ dan sebaliknya untuk $0 < a < b$, $^{a}\log b > 0$!

15. $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $2 \times \log^2 a + \log a = 6$?

16. Nyatakan p dalam q supaya berlaku $^{p}\log q - 6\ {}^{q}\log p = 1$!

17. $^{2}\log^2 a$ adalah notasi untuk $(^{2}\log a)^2$. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka berapakah nilai a yang memenuhi $^{2}\log^2 (a^2 - 6a) + {}^{2}\log (a^2 - 6a)^2 = 8$.

18. Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, nyatakan b dalam a yang memenuhi persamaan $^{a}\log^2 (b^a + a) - {}^{a}\log (b^a + a)^3 + 2 = 0$

SOAL TANTANGAN

19. Jika $^{4}\log a = p$ dan $^{8}\log b = q$ maka tentukanlah

$$\sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{\ldots}}}}}}}$$

dalam p dan q.

Projek

Skala logaritma dipergunakan untuk banyak keperluan selain menyatakan intensitas bunyi. Cari informasi tentang besaran lain yang menggunakan skala logaritma. Untuk membedakan analisis menggunakan logaritma bahkan digambarkan grafik dalam skala logaritma. Cari informasi ada berapa macam skala logaritma biasa dipergunakan dan beri contoh penelitian agar skala logaritma tersebut dipergunakan. Buat laporan hasil pengamatan dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat eksponen dan logaritma di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Konsep eksponen dan logaritma dapat ditemukan kembali dari berbagai pemecahan masalah nyata di sekitar kehidupan kita.

2. Operasi eksponen adalah perluasan dari operasi perpangkatan yang sudah dipelajari di Sekolah Dasar dan SMP. Operasi perpangkatan pasti merupakan eksponen, tetapi operasi eksponen belum tentu perpangkatan. Perbedaannya terletak pada semesta pembicaraannya. Semesta pembicaraaan pada operasi perpangkatan adalah bilangan, tetapi semesta pembicaraan pada eksponen tergantung variabel sebagai eksponen dari basisnya. Misalnya $p^x = q$, x sebagai eksponen dari p, dimana x dan p belum tentu bilangan, tetapi $2^3 = 8$, 3 adalah sebuah bilangan pangkat dari 2.
3. Perpangkatan dan penarikan akar adalah dua operasi yang saling berkebalikan. Artinya jika suatu bilangan dipangkatkan dan hasilnya diakarkan dengan pangkat akar yang sama dengan pangkat bilangan sebelumnya, maka hasilnya adalah bilangan semula. Misalnya $2^3 = 8$ maka $\sqrt[3]{8} = 2$
4. Sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk menurunkan sifat-sifat penarikan akar.
5. Eksponen dan logaritma adalah dua operasi yang saling berbalikan. Artinya jika suatu basis a dieksponenkan dengan c dan hasilnya adalah b, maka logaritma dari b dengan basis yang sama, yaitu a, hasilnya adalah c sebagai eksponen dari a. Dapat ditulis misal $a, b, c \in R$, $0 < a < 1$, $a \neq 1$ dan $b > 0$, jika $a^c = b$ maka ${}^a\log b = c$.
6. Jika grafik fungsi eksponen dicerminkan terhadap sumbu $y = x$, maka diperoleh grafik fungsi logaritma.
7. Penguasaan berbagai konsep dan sifat-sifat eksponen dan logaritma adalah prasayarat untuk mempelajari fungsi eksponen dan fungsi logaritma sebab fungsi eksponen melibatkan bilangan eksponen dan fungsi logaritma melibatkan logaritma. Secara mendalam, berbagai sifat-sifat dari fungsi eksponen dan logaritma serta penerapannya akan dibahas dipokok bahasan peminatan.

Pada Bahasan 2 (Bab 2), kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier yang melibatkan variabel berpangkat satu. Sama halnya dengan penemuan kembali konsep eksponen dan logaritma melalui pemecahan masalah nyata, akan kita temukan konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linier dari berbagai situasi nyata kehidupan disekitar kita. Penguasaan kamu pada materi eksponen dan logaritma akan berguna untuk mempelajari materi pada bab berikutnya. Perlu kami tekankan bahwa mempelajari materi matematika mulai bahasan 1 sampai 12, harus dipelajari secara terurut, jangan melompat-lompat, sebab sangat dimungkinkan penguasaan materi pada bahasan berikutnya didasari penguasaan materi pada bahasan sebelumnya.

Bab 2

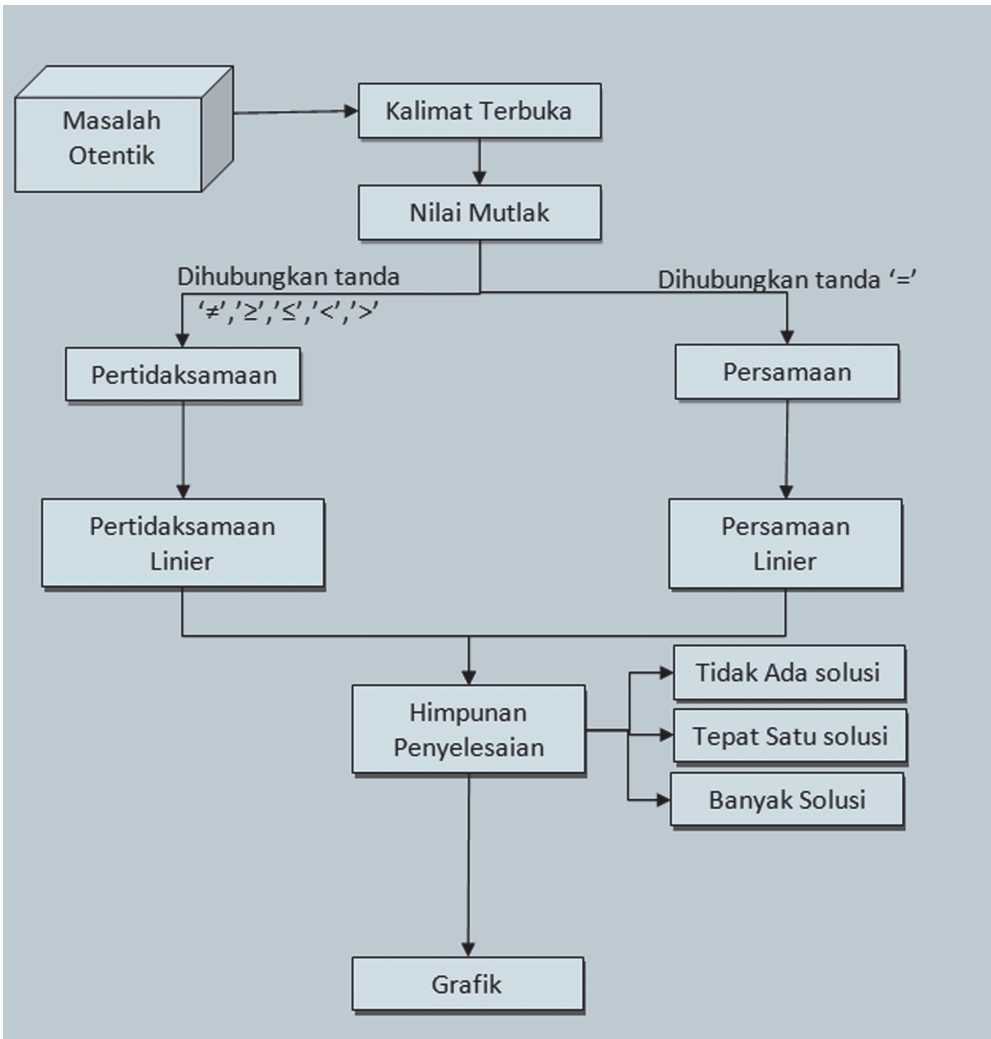
Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami dan menganalisis konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan serta menerapkannya dalam penyelesaian masalah nyata; 3. menerapkan konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linear dalam memecahkan masalah nyata.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mampu berpikir kreatif; • mampu menghadapi permasalahan pada kasus linear dalam kehidupan sehari-hari; • mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan; • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep; • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan; • mengajak siswa untuk menerapkan mate-matika dalam kehidupan sehari-hari; • siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- *Orde linear*
- *Lebih dari*
- *Kurang dari*
- *Nilai mutlak*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada saat ini, kita akan mempelajari beberapa ilustrasi dan kasus untuk memahami dan menemukan konsep nilai mutlak (absolut).

- *Motivasi siswa mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linear dengan menunjukkan kebergunaan berbagai konsep dan aturan matematika dalam pemecahan masalah nyata. Orientasi siswa pada situasi nyata untuk membangun inspirasi penemuan konsep nilai mutlak. Motivasi siswa melalui pemaparan manfaat mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier. Beri kesempatan pada siswa bertanya dan mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka.*

1. Menemukan Konsep Nilai Mutlak

Ilustrasi:

Gambar 2.1 Anak Pramuka

Kegiatan pramuka adalah salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sebuah sekolah. Sebuah grup pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan pasukan: "Maju 4 langkah, jalan!", hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah ke depan. Jika perintah pimpinan pasukan: "Mundur 3 langkah, jalan!", hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak melawan arah sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. "Maju 4 langkah", berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan "mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya. Lebih jelasnya, mari bersama-sama mempelajari kasus-kasus di bawah ini.

- *Uji pemahaman siswa terhadap berbagai kasus yang disajikan. Beri kesempatan pada siswa berdiskusi dalam kelompok belajar agar mereka terlatih bekerjasama menemukan alternatif strategi penyelesaian masalah. Arahkan siswa mempresentasikan hasil kerja kelompok dan kelompok lain diberi kesempatan menanggapi hasil kerja kelompok penyaji.*

.

Masalah-2.1

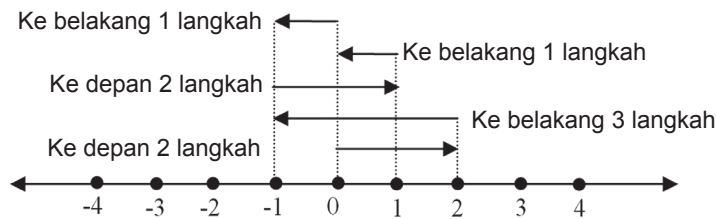
Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya 1 langkah ke belakang.

Permasalahan:

a. Dapatkah kamu membuat sketsa lompatan anak tersebut?
b. Tentukanlah berapa langkah posisi akhir anak tersebut dari posisi semula!
c. Tentukanlah berapa langkah yang dijalani anak tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Kita definisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif, dengan demikian lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif.

Perhatikan sketsa berikut:

Gambar 2.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan, langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif), anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif) dari posisi akhir langkah pertama, demikianlah seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah ke 5.

Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = -1$). Banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak, karena kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya. Banyak langkah selalu dinyatakan dengan bilangan bulat positif walaupun arahnya ke arah sumbu x negatif. Banyak langkah dapat dinyatakan dengan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat. Misalnya mundur 3 langkah dinyatakan dengan harga mutlak negatif 3 ($|-3|$). Sehingga banyak langkah anak tersebut adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (9 langkah).

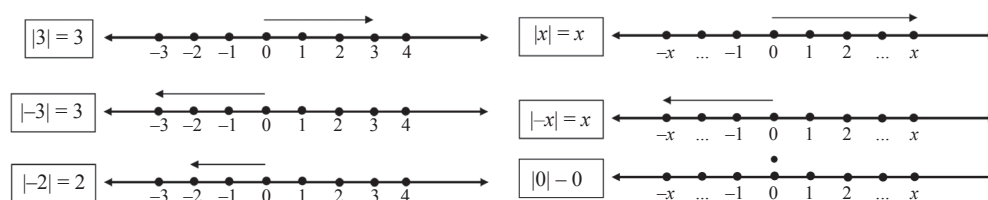
Perhatikan Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Nilai Mutlak

Nilai Non Negatif	Nilai Mutlak	Nilai Negatif	Nilai Mutlak
0	0	–2	2
2	2	–3	3
3	3	–4	4
5	5	–5	5

Dari ilustrasi dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik sebuah kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak tersebut? Jika x adalah variabel pengganti semua bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak x tersebut?

Perhatikan bahwa x elemen himpunan bilangan real, kita tuliskan dengan $x \in R$.

Dari contoh pada tabel tersebut, kita melihat bahwa nilai mutlak akan bernilai positif atau nol. *Nilai mutlak adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real*. Perhatikan garis bilangan berikut. Kita lakukan beberapa percobaan perpindahan posisi sebagai berikut.

Gambar 2.3 Selang Nilai Mutlak

Berdasarkan Gambar 2.3 di atas, dapat diperoleh definisi nilai mutlak berikut.

Definisi 2.1

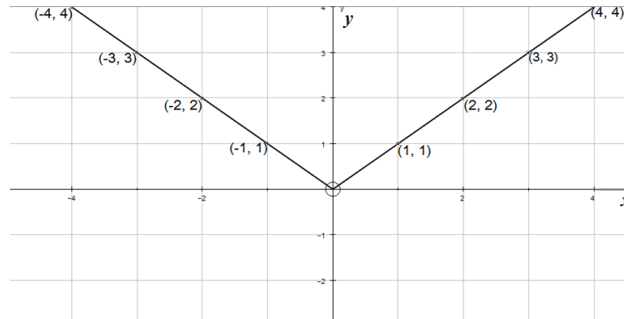
Misalkan x bilangan real, didefinisikan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Berikutnya, kita akan mencoba menggambar grafik $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$.

Perhatikan beberapa titik yang mewakili grafik fungsi di atas.

Tabel 2.2 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x|$

x	–4	–2	–1	0	1	2	4
$y=f(x)$	4	2	1	0	1	2	4
(x,y)	(–4,4)	(–2,2)	(–1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(4,4)

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel, disajikan dalam koordinat kartesius sebagai berikut.

Gambar 2.4: Grafik $y = f(x)=|x|$

Berdasarkan definisi dan gambar grafik di atas dapat kita simpulkan bahwa harga $|x|$ pada dasarnya menyatakan besar simpangan dari titik $x = 0$.

- *Motivasi siswa secara internal melalui menunjukkan kebergunaan mempelajari nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari. Ajukan kasus berikut untuk lebih mendalami materi. Beri kesempatan pada siswa menganalisis masalah dan makna nilai mutlak dari berbagai kemungkinan nilai bilangan riel.*

Contoh 2.1

Gambarkan grafik $f(x) = |x-2|$ yang menyatakan besar simpangan pada titik $x = 2$. Sekarang, mari kita buat grafik $f(x) = |x-2|$, dengan langkah-langkah berikut.

- *Meminta siswa melengkapi tabel yang ada pada buku siswa seperti yang tertera pada tabel di bawah ini. Selanjutnya minta siswa menggambarkan grafik fungsi $f(x) = |x-2|$, dengan langkah-langkah berikut.*

Langkah 1.

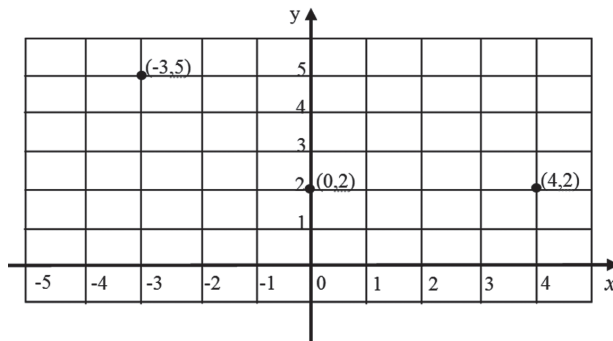
Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan titik-titik yang mewakili grafik tersebut.

Tabel 2.3 Pasangan Titik pada Fungsi $f(x) = |x-2|$

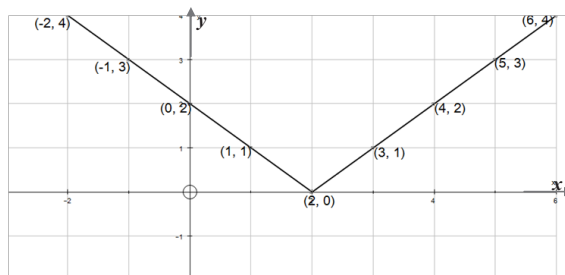
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	5	...	...	2	...	...	...	2
(x,y)	(–3,5)	...	...	(0,2)	...	...	...	(4,2)

Lengkapilah tabel di atas!

Langkah 2.

Letakkanlah titik-titik yang kamu peroleh pada Tabel 2.3 pada koordinat kartesius.

Gambar 2.5 Titik Grafik $f(x) = |x-2|$

Langkah 3.

Hubungkanlah titik-titik yang sudah kamu letakkan di koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai x.

Gambar 2.6 Titik Grafik $f(x) = |x-2|$

Latihan 2.1

Perhatikan grafik $f(x) = |x-2|$

Lihatlah penyimpangan grafik terhadap sumbu x. Dapatkah kamu beri kesimpulan? Bagaimana dengan penyimpangan pada grafik $f(x) = |x-p|$ terhadap sumbu x, untuk p bilangan real.

Selanjutnya, mari kita amati hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Hubungan |x| dan $\sqrt{x^2}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0	1	2	3

Dapatkah kamu mengambil kesimpulan hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$ berdasarkan tabel di atas?

Latihan 2.2

Dari definisi nilai mutlak yang kita berikan, dapatkah anda berikan pendefinisian berikut.

$$|ax+b| = \begin{cases} \ldots & \text{jika} \quad \ldots \geq \ldots \\ \ldots & \text{jika} \quad \ldots < \ldots \end{cases}$$

Cobalah mendiskusikannya dengan temanmu!

2. Persamaan Linear

- *Orientasi siswa pada Masalah-1.2 berikut. Arahkan siswa belajar dalam kelompok! Beri bantuan bagi siswa atau kelompok yang mengalami masalah. Beri kesempatan pada siswa bertanya dan mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka.*

Masalah-2.2

Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia membelanjakan uangnya Rp4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dia belanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari Selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanjaan hari Senin. Sekarang dia masih memiliki uang sisa belanjaan sebanyak Rp1.000,00.

Dapatkah kamu membuat model dari kasus permasalahan tersebut? Buatlah model tersebut, apakah kamu dapat menentukan uang Andi sebelum dibelanjakan?

Diketahui:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}$ × jumlah uangnya.

Belanja hari Senin = Rp4.000,00 lebih sedikit dari belanja hari Minggu.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}$ × belanja hari Senin.

Ditanya:

- Buatlah model matematika dari permasalahan di atas.
- Tentukan berapa uang Andi sebelum dibelanjakan.

Penyelesaian

Marilah kita bersama-sama menyelesaikan permasalahan ini.
Misal banyak uang Andi = x
Dari yang diketahui diperoleh

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right)$

Kita buat sebuah persamaan dari kasus ini, yaitu:
Uang Andi = jumlah uang yang dibelanjakan + sisa uang
sehingga penyelesaian permasalahan ini, adalah:

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000 \text{ (kalikan kedua ruas dengan 6),}$$

$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$

$= 7x - 26.000$

$x = 26.000$

Dengan demikian uang Andi mula-mula adalah Rp 26.000,00.

- *Rancang lembar aktivitas siswa dalam memecahkan masalah 2.3. Beri kesempatan pada siswa memikirkan penyelesaian masalah. Guru dapat memberikan bantuan ketika siswa mengalami masalah, tetapi melalui contoh-contoh analogi, mengingatkan kembali pengetahuan yang telah dimiliki siswa, memberi kesempatan bertanya terhadap hambatan yang dialami.*

Masalah-2.3

Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenek diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tanggal lahirnya. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi.
Dapatkah kamu membuat persamaan linear dari persoalan di atas? Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Diketahui:
Umur kakek – umur nenek = 3

Misalkan: Umur kakek = K Umur nenek = N
Tahun lahir kakek = TK Tahun lahir nenek = TN
$K - N = 3$.

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:
$N = (20 - 11) + (2013 - 1945)$ atau $N = 77$ tahun sehingga dengan $K - N = 3$ membuat $K = 80$ tahun.
Selanjutnya kita mendapatkan konsep mencari dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:
$TN + 77 = 2013$ atau $TN = 1936$
$TK + 80 = 2013$ atau $TK = 1933$
Dengan demikian, kemungkinan tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

- *Beri kesempatan pada siswa mencoba menyelesaikan kasus 4. Organisasikan siswa belajar dalam kelompok. Amatilah mereka bekerja, berkeliling mencermati berbagai kesulitan yang dialami siswa. Berilah bantuan pada siswa yang mengalami kesulitan, ujilah pemahaman siswa atas berbagai proses penyelesaian masalah.*

Masalah-2.4

Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada *c* tahun yang akan datang, (*c* adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun yang lalu.
Apakah kamu dapat menentukan umur ayah saat ini? Tentukanlah nilai *c* pada kasus tersebut!

Alternatif Penyelesaian

1. Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.
2. Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan

   Umur ayah 4 tahun yang lalu 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang,

   atau $x-4=\frac{2}{3}(x+c)$

   Umur ayah sekarang 27 tahun lebihnya dari 1/5 kali umurnya pada 7 tahun yang lalu.

   Artinya: $x=\frac{1}{5}(x-7)+27$

3. Model yang telah diperoleh, kita selesaikan sebagai berikut:

   $x-4=\frac{2}{3}(x+c) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2c + 12$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)

   $x=\frac{1}{5}(x+7)+27 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 128 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad x = 32$

Kita substitusi $x = 32$ ke $x = 2c + 12$
Diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$
Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

Diskusi

Coba anda teliti kasus berikut! Dapatkah kamu menjawab dan memberi komentar, apakah kasus berikut logis?
Umur Ayah 5 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umurnya pada *c* tahun yang akan datang. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari 1/2 kali umurnya 7 tahun yang lalu.

Ketiga permasalahan di atas adalah sebuah pemahaman konsep dari bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Secara induktif, bentuk umum dari persamaan linear satu variabel dan dua variabel, sebagai berikut.

Definisi 2.2

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, dimana

x : variabel
a : koefisien dari x
b : konstanta

Definisi 2.3

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan yang didefinisikan $ax + by + c = 0$ dengan $a, b \in R$, a dan b tidak keduanya nol, dimana

x,y: variabel
a : koefisien dari x
b : koefisien dari y
c : konstanta persamaan

Contoh 2.2

1. Diberikan persamaan linear $x - 4y = 12$, untuk setiap $x, y \in R$. Gambarkanlah grafiknya!

Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ dan kita buat pada tabel berikut.

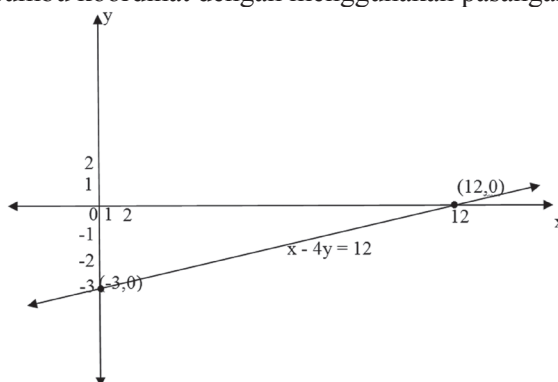
- *Arahkan siswa berdiskusi dengan temanya satu kelompok, dan meminta siswa mengisi tabel di atas untuk mendapatkan titik-titik yang dilalui grafik persamaan x – 4y = 12. Berapa banyak pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan tersebut?*

Tabel 2.5 Pasangan titik (x,y) untuk grafik x – 4y = 12

x	0	12	13	16	...	...	...
y	–3	0	$\frac{1}{4}$	1	...	...	...
(x,y)	(0,–3)	(12,0)	$(13,\frac{1}{4})$	(16,1)	...	...	...

Dari data Tabel 2.5 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$$HP = \{(0,-3),(12,0),(13,\frac{1}{4}),(16,1),\ldots\}.$$

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian persamaan, khususnya diketahui bahwa grafik $x - 4y = 12$ ini memotong sumbu x pada titik (12, 0) serta memotong sumbu y pada titik (0, –3), dapat kita gambarkan grafik $x - 4y = 12$ pada sumbu koordinat dengan menggunakan pasangan (x, y) tersebut.

Gambar 2.7 Grafik *x* – 4*y* = 12

Contoh 2.3

Diberikan persamaan linear $y = 3x - 4$, untuk setiap $x \in R$. Gambarlah grafik persamaan linear tersebut!

Penyelesaian

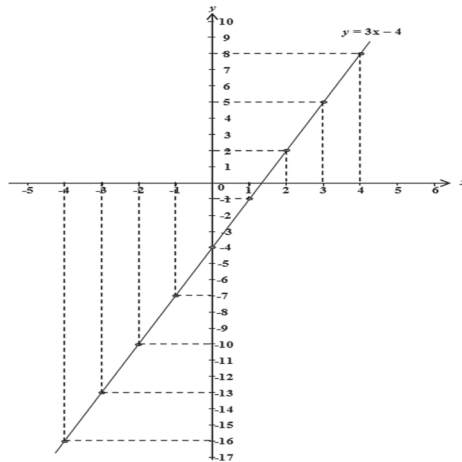
Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ dan kita buat pada tabel berikut.

Tabel 2.6 Pasangan titik (*x*,*y*) untuk grafik *y* = 3*x* – 4

x	–4	–3	–2	–1	0	$\frac{4}{3}$	...
y	–16	–13	–10	–7	–4	0	...
(x,y)	(–4, –16)	(–3,–13)	(–2, –10)	(–1, –7)	(0, –4)	$\left(\frac{4}{3},0\right)$	...

Dari data Tabel 2.6 dapat dinyatakan bahwa pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$HP = \{(-4,-16),(-3,-13),(-2,-10),(-1,-7),(0,-4),(\frac{4}{3},0)\ \ldots.\}$.

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian, dapat dikatakan bahwa grafik $y = 3x - 4$ memotong sumbu x pada titik $(\frac{4}{3},0)$ dan memotong sumbu y pada titik (0, –4). Selanjutnya kita gambarkan grafik $y = 3x - 4$ pada koordinat kartesius dengan menggunakan pasangan nilai (x, y) tersebut.

Gambar 2.8 Grafik *y* = 3*x* – 4

Definisi 2.4

Misalkan *a*, *b*, dan *c* bilangan real dan *a*, *b* keduanya tidak nol.

Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

Diskusi

Berdasarkan Definisi-2.3, berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel memiliki anggota himpunan penyelesaian adalah tepat satu atau penyelesaian tunggal? Beri contoh persamaanya!
2. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota himpunan penyelesaian? Beri contoh persamaannya!

Uji Kompetensi 2.1

1. Salah satu penyakit sosial remaja sekarang ini adalah merokok. Ahli kesehatan merilis informasi bahwa, akibat menghisap satu batang rokok akan mengurangi waktu hidup seseorang selama 5,5 menit. Seorang remaja mulai merokok 1 (satu) batang rokok perhari sejak umur 15 tahun. Berapa umur remaja tersebut yang berkurang sampai dia berumur 40 tahun?

2. Perhatikan grafik di bawah ini!

Dari pasangan titik-titik yang diberikan, tentukanlah persamaan linear yang memenuhi pasangan titik-titik tersebut.

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian untuk setiap persamaan linear berikut ini!
   a. $5x - 3y = 7$
   b. $\frac{2}{3}y - 4x - 1 = 0$
   c. $y = \frac{1}{3} - 5x$

4. Untuk dapat diterima sebagai suster di RS.SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut:
   Tes Tertulis= 75, Psikotes =78, dan Tes Wawancara=85. Tentukan nilai terendah Tes Keterampilannya agar ia dapat diterima di rumah sakit tersebut.

5. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan 1/6 dari berat benda di bumi. Tentukan berat maksimum astronot di bumi!

6. Seorang penderita diabetes sedang mengontrol berat badannya. Ia menggunakan indeks berat badannya dengan rumus $I = W/h^2$, dengan W adalah berat badan (kg), dan h adalah tinggi badan (meter). Nilai I yang dimiliki setiap orang memiliki arti sebagai berikut.
   - $25 < I$ berarti berat badan normal
   - $25 < I < 30$ berarti kelebihan berat badan
   - $30 < I < 35$ berarti obesitas ringan
   - $35 < I < 40$ berarti obesitas sedang
   - $40 < I$ berarti obesitas kronis

   a. Jika tinggi badan orang tersebut 175 cm, berapa berat badan maksimal supaya tergolong berat badan normal?

   b. Jika orang tersebut sudah memiliki berat badan 80 kg dan yang akan dikontrol adalah tinggi badan dengan melakukan suatu terapi tertentu, tentukan batas tinggi badan agar digolongkan dalam katagori kelebihan berat badan.

7. Gambarkanlah grafik $g(x) = |2x–1|$ untuk $1 < x < 10$!

Projek

Perhatikan bahwa persamaan linear dua variabel dapat dibuat grafiknya asal diketahui dua titik yang dilaluinya. Padahal, persamaan linear dua variabel memiliki dua koefisien dan satu konstanta. Selidiki apa implikasi dari kenyataan ini. Misal, selidiki apakah hanya ada satu persamaan linear dua variabel yang melalui dua titik yang sama. Apakah ini berarti ada beberapa persamaan linear dua variabel berbeda yang melalui dua titik yang sama. Ataukah walaupun banyak, semua persamaan linear dua variabel melalui dua titik yang sama sebenarnya adalah sama. Buat laporan hasil kegiatanmu dan paparkan di depan kelas.

3. Aplikasi Nilai Mutlak pada Persamaan Linear

- *Motivasi siswa belajar nilai mutlak kaitannya dengan persamaan linier. Memunculkan keingintahuan siswa kebergunaan materi nilai mutlak dan persamaan linear terkait debit air.*

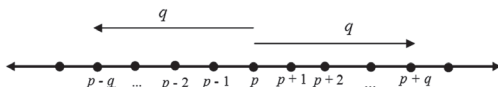
Kamu telah menerima pemahaman lewat pengamatan terhadap beberapa kasus pada nilai mutlak dan persamaan linear satu dan dua variabel. Selanjutnya kamu akan menyelesaikan penerapan konsep nilai mutlak tersebut ke persamaan linier. Kamu diharapkan mampu memahami aplikasi kedua konsep tersebut.

Masalah-2.5

Sungai Bengawan Solo sering meluap pada musim hujan dan kering dimusim kemarau. Jika debit air sungai tersebut adalah p liter/detik pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah sebesar q liter/detik.
Tunjukkanlah sketsa penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut!

Gambar 2.9 Sungai

Alternatif Penyelesaian

Telah kamu ketahui bahwa penyimpangan dari suatu nilai tertentu dapat dinyatakan dengan harga mutlak.

Misalkan debit air sungai = x
Simpangan x terhadap nilai pada cuaca normal = $|x - p|$. Karena perubahan debit air tersebut bernilai q maka $|x - p| = q$. Sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$.
Dari sketsa di atas, tampak jelas bahwa penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

4. Pertidaksamaan Linear

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas angkutan umum. Perhatikan masalah berikut!

Masalah-2.6

Ayah Budi lebih muda dibanding pamannya tetapi lebih tua dari ibunya. Sementara umur bibinya hanya satu tahun lebih tua dari umur ibunya tetapi satu tahun lebih muda dari umur ayahnya.
Budi berencana mengurutkan umur antara ayah, ibu, paman, dan bibinya berdasarkan umur mereka yang lebih tua.
Dapatkah kamu membantu Budi dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Pertama sekali didefinisikan variabel-variabelnya sebagai berikut:
Umur ayah = A Umur ibu = I
Umur paman = P Umur bibi = B

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Ayah lebih muda dibanding paman
$A < P$
b. Ayah lebih tua dari ibu
$A > I$ atau $I < A$
c. Umur bibi hanya satu tahun lebih tua dari umur ibu
$B + 1 = I$ atau $B > I$
d. Umur bibi satu tahun lebih muda dari ayah
$B – 1 = A$ atau $B < A$

Dengan mengamati pola di atas, yaitu $A < P$, $I < A$, $I < B$, dan $B < A$.

Urutan umur mereka mulai dari tertua ke termuda adalah $P > A > B > I$.

Sehingga kesimpulan adalah paman lebih tua dibanding ayah, ayah lebih tua dibanding bibi, dan bibi lebih tua dibanding ibu.

Diskusi

Meminta siswa mendiskusikan masalah urutan berikut dengan menggunakan metodenya sendiri!
Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan di sungai setiap Sabtu. Suatu hari, setelah mereka selesai memancing, mereka menghitung banyak ikan yang mereka dapatkan masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua, juga masih lebih sedikit dibanding dengan tangkapan Pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Dalam metode kasus dijelaskan variabel yang dipergunakan, hubungan antar variabel berdasarkan informasi yang ada, dan kesimpulan yang kamu ambil berdasarkan hubungan-hubungan tersebut.

Masalah-2.7

Gambar 2.10 Tentara menembak

Seorang tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah kosong warga sipil. Dia berencana menembak obyek yang telah ditentukan di sebuah perbukitan. Jika $x = 0$ adalah posisi diam tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek diperkirakan memenuhi persamaan $2y - x - 0{,}66 = 0$. Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemung-kinan lintasan peluru dapat berubah menjadi $y - 0{,}475x - 0{,}35 = 0$. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang 0,05 m oleh pengaruh-pengaruh perubahan arah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Lintasan peluru seharusnya $2y - x - 0{,}66 = 0$. Kenyataannya $y - 0{,}475x - 0{,}35 = 0$. Simpangan antara keduanya dapat dinyatakan sebagai selisih harga mutlak. Sehingga diperoleh

$|(0{,}5x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)| \leq 0{,}05$

$\Leftrightarrow \quad |0{,}025x - 0{,}02| \leq 0{,}05$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(0{,}025x - 0{,}02)^2} \leq 0{,}05$ dengan menggunakan kesetaraan $|x| = \sqrt{x^2}$

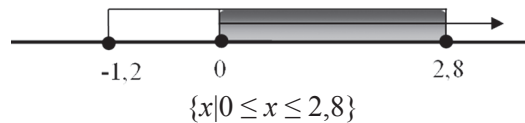
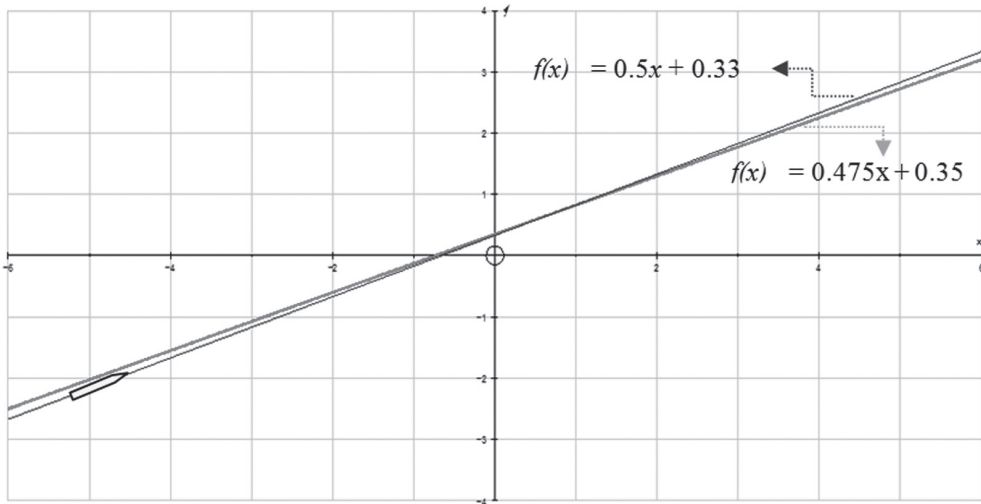
$\Leftrightarrow \quad (0{,}025x - 0{,}02)^2 \leq (0{,}05)^2$

$\Leftrightarrow \quad (0{,}025x - 0{,}02)^2 - (0{,}05)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad [0{,}025x + 0{,}03][0{,}025x - 0{,}07] \leq 0$

Nilai pembuat nol adalah $x = -1{,}2$ atau $x = 2{,}8$

Selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai negatif adalah $-1.2 \leq x \leq 2{,}8$, tetapi karena $x = 0$ adalah posisi diam tentara atau posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$. Dengan demikian, interval $-1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$ akan kita iriskan kembali dengan $x \geq 0$ seperti berikut.

$\{x | 0 \leq x \leq 2{,}8\}$

Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi sejauh 2,8 m dari posisi awal.
Permasalah di atas dapat dinyatakan dengan grafik sebagai berikut.

Gambar 2.11 Lintasan Peluru

Dari Gambar 2,11, jelas kita lihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan (garis putus-putus). Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi sampai $x = 2{,}8$ m.

Contoh 2.4

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan metode umum $|2x + 1| \geq |x - 3|$!

Penyelesaian

Langkah 1: Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$ sehingga:

$$|2x+1| \geq |x-3| \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq (x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 \geq 0 \qquad \text{(bentuk kuadrat)}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x+4) \geq 0$$

Langkah 2: Menentukan pembuat nol.

$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3: Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan

+ - +

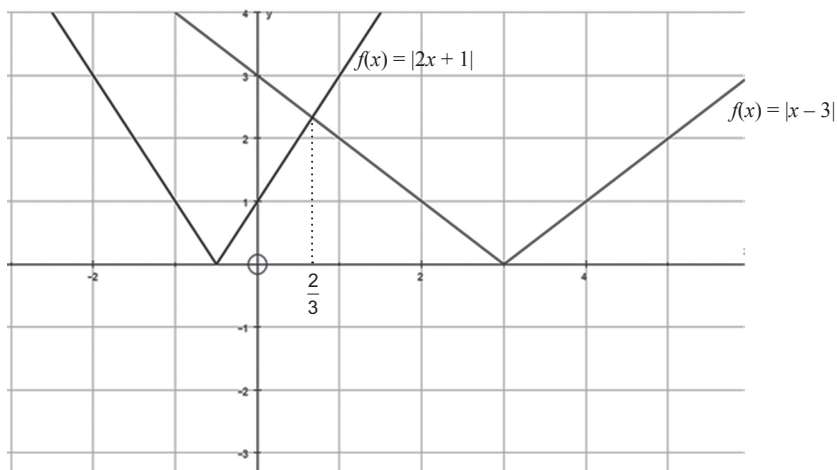
-4 $\frac{2}{3}$

Langkah 4: Menentukan interval penyelesaian.

Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai positif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian arsiran pada interval di bawah ini adalah interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$HP = \left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Permasalahan di atas dapat diselidiki dengan memperlihatkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x + 3|$, untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan grafik pada Gambar 2.4, kita memperoleh grafik sebagai berikut.

Gambar 2.12 Grafik $f(x) = |2x + 1|$ dan $f(x) = |x + 3|$

Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dilihat sebagai grafik fungsi $f(x) = |2x + 1|$ berada di atas grafik $f(x) = |x - 3|$. Dari Gambar 2.11 terlihat bahwa pernyataan itu benar untuk nilai x dalam himpunan $\left\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R\right\}$. Coba gambar sendiri lanjutan kurvanya.

5. Aplikasi Nilai Mutlak pada Pertidaksamaan Linear

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke pertidaksamaan linier, dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.

Masalah-2.8

Gambar 2.13 Inkubator

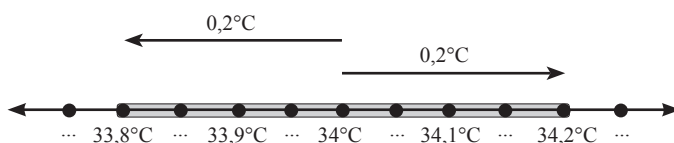
Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus diinkubator selama beberapa hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama 2 hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100–2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0.2°C maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator!

Alternatif Penyelesaian

Pada kasus bayi ini, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1–2 hari semenjak kelahiran adalah 34°C. Misalkan T adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruangan, dengan perubahan yang diharapkan sebesar 0.2^{O}C, maka nilai mutlak suhu tersebut dapat kita modelkan, sebagai berikut:

$$|T - 34^{O}C| \le 0,2^{O}C$$

Kasus ini dapat kita selesaikan melalui cara berikut.

Cara I. (Dengan mengamati sketsa)

Gambar 2.14 Interval perubahan suhu

sehingga interval kenaikan suhu inkubator adalah interval $T\,|33,8^{O}C \le T \le 34,2^{O}C\}$.

Cara II. (Secara Aljabar)

Dengan mengingat bahwa $|T| = \sqrt{T^2}$ maka:

$|T - 34^{O}C| \le 0,2^{O}C \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(T - 34\infty C)^2} \le 0.2\infty C$ (kuadratkan)

$\Leftrightarrow (T - 34^{O}C)^2 \le (0,2^{O}C)^2$

$\Leftrightarrow (T - 34^{O}C)^2 - (0,2^{O}C)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow [(T - 34^{O}C) - (0,2^{O}C)]\,[(T - 34^{O}C) + (0,2^{O}C)] \le 0$

$\Leftrightarrow [T - 34,2^{O}C]\,[T - 33,8^{O}C] \le 0$

Nilai pembuat nol adalah $T = 34,2^{O}C$ atau $T = 33,8^{O}C$

33,8°C 34,2°C

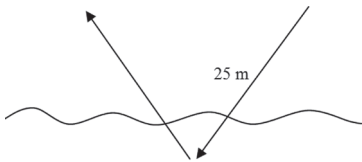
$$\{T\,|33,8^{O}C \le T \le 34,2^{O}C\}$$

Uji Kompetensi 2.2

Selesaikan soal-soal berikut.

1. Sketsalah grafik $y = \left|\frac{x}{3} - 2\right| + 6$, untuk setiap nilai x bilangan real dengan terlebih dahulu menampilkan pasangan titik-titik yang dilalui grafik tersebut.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7	...	...	6	...	...	7	...
(x,y)	(3,7)	...	...	(6,6)	...	...	(9,7)	...

2. Seekor burung camar laut terbang pada ketinggian 17 meter melihat ikan pada jarak 25 meter sehingga ia terbang menukik ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali seperti gambar.

Jika kita asumsikan permukaan laut sebagai sumbu x maka fungsi pergerakan burung tersebut adalah $f(x) = |x - a| + b$ dengan a, b, dan x adalah bilangan real.
Tentukanlah nilai a dan b tersebut!

3. Buktikan:
   a. $|x^2| = x^2$
   b. $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$

   Petunjuk: $|x| = \sqrt{x^2}$

4. Buktikan:
   a. $|a + b| \leq |a| + |b|$
   b. $|a - b| \leq |a| + |b|$
5. Buktikan bahwa grafik persamaan linear dua variabel adalah garis lurus!
6. Gambarkanlah semua titik (x,y) pada bidang yang memenuhi $|x + y| + |x - y| = 2$.
7. Gambarkanlah himpunan penyelesaian ketaksamaan linear berikut ini, dalam bentuk diagram garis!
   a. $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$
   b. $|x - 2| \leq |x + 1|$

Pilihlah jawaban yang benar.

8. Pertidaksamaan $2x - a < \frac{x-1}{2} + \frac{ax}{3}$ mempunyai penyelesaian $x > 5$. Nilai a adalah ...
   (A) 2
   (B) 3
   (C) 4
   (D) 5
   (E) 6
9. Semua nilai x yang memenuhi $0 < |x - 3| \leq 3$ adalah ...
   (A) $\{x|0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
   (B) $\{x|0 \leq x < 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
   (C) $\{x|0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x \leq 6, x \in R\}$
   (D) $\{x|0 \leq x \leq 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in R\}$
   (E) $\{x|0 < x < 3 \text{ atau } 3 < x < 6, x \in R\}$

10. Himpunan penyelesaian dari $|3x + 2| > 5$ adalah ...

(A) $\{x|x < -\frac{1}{3}$ atau $x > 0, x \in R\}$

(B) $\{x|x < -\frac{7}{3}$ atau $x > 1, x \in R\}$

(C) $\{x|x < -1$ atau $x > 1, x \in \mathrm{R}\}$

(D) $\{x|x < -\frac{1}{2}$ atau $x > 1, x \in \mathrm{R}\}$

(E) $\{x|x < -\frac{1}{4}$ atau $x > 0, x \in \mathrm{R}\}$

Projek

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dalam persamaan linear. Misalkan saja besar tagihan telepon terhadap pemakaian.

- Dapatkan informasi tentang besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dengan persamaan linear dan bagaimana bentuk persamaan linear tersebut.
- Demikian juga dengan nilai mutlak. Ketelitian selalu dinyatakan dengan nilai mutlak, karena ketelitian tidak memperhatikan apakah penyimpangan pada nilai sebenarnya adalah positif atau negatif. Dengan kata lain, penyimpangan sebesar –0,05 adalah sama tidak telitinya dengan penyimpangan sebesar 0,05.
- Dapatkan informasi tentang pengguanan nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari yang kamu jumpai.
- Buat laporan tentang hasil pencarian dan pengkajianmu serta paparkan hasilnya di depan kelas. Akan lebih menarik apabila kamu juga membandingkan beberapa alternatif pembayaran yang ditawarkan oleh penyedia jasa (misalnya: telepon, listrik) untuk menentukan alternatif mana yang paling menguntungkan sesuai dengan penggunaan.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear, maka dapat diambil berbagai simpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa simpulan disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak dari sebuah bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif. Misal $a \in$ R, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu x.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$. Demikian juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Bentuk umum dari persamaan linear dinyatakan: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear dua variabel.
4. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan pertidaksamaan $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. Misal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka ditemukan pertidaksamaan linear satu variabel dan apabila $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linear dua variabel.
5. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linear adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variabel yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaaan linear dapat (1) tepat satu, (2) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian), atau (3) tidak punya penyelesaian.
6. Grafik persamaan linear satu atau dua variabel adalah sebuah garis lurus yang mungkin memotong sumbu x dan sumbu y atau tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y atau hanya memotong sumbu y.

Konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear telah kita temukan dan kita terapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan penyelesaian masalah matematika. Penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan temukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan

linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, kamu pelajari berbagai metode penyelesainya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluru konsep dan aturan-aturan yang kita temukan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.

Bab
3

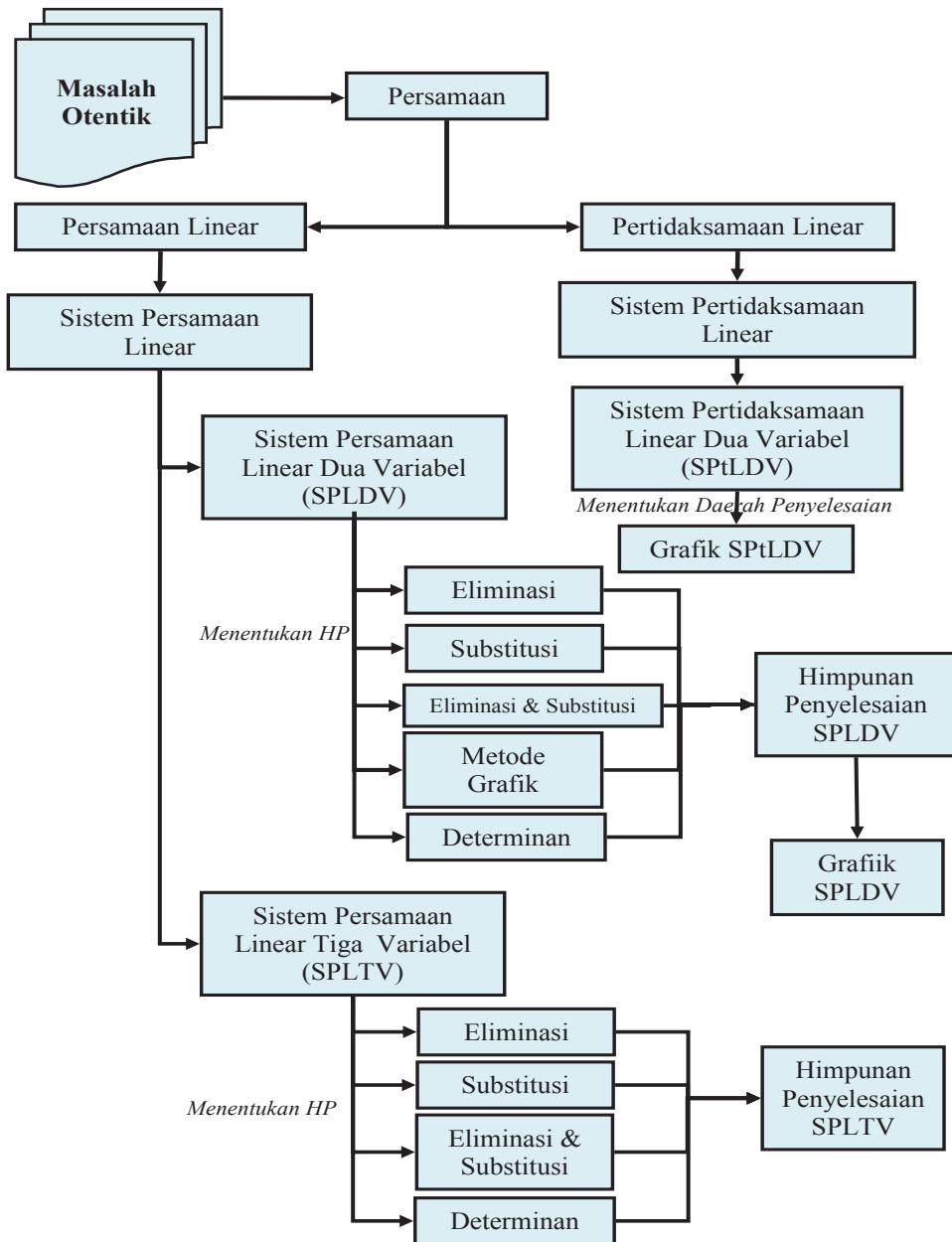
Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu: 1. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami konsep sistem persamaan linear dua dan tiga variabel serta pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam penyelesaian masalah matematika; 3. menggunakan SPLDV, SPLTV dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna tiap besaran secara lisan maupun tulisan; 4. Membuat model matematika berupa SPLDV, SPLTV, dan SPtLDV dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya; 5. membuat model matematika berupa persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel yang melibatkan nilai mutlak dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya.	Melalui pembelajaran materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model matematika sebagai SPLDV atau SPLDV; • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLDV atau SPLDV; • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan; • menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan; • menemukan ciri-ciri SPLDV atau SPLDV dari model matematika; • menuliskan konsep SPLDV atau SPLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah Penting

- *SPL*
- *SPLDV*
- *SPLTV*
- *Himpunan Penyelesaian*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

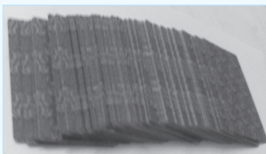
1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di kelas VIII SMP. Pada saat ini kita perdalam kajian, pemahaman dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah miliki sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini, kamu berupaya menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut kita jadikan bahan inspirasi dan menyusun model-model Matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, kita jadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear dua variabel.

- *Untuk menemukan konsep sistem persamaan linear dua variabel, ajukan pada siswa Masalah-3.1, dan Masalah 3.2 secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Upayakan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi dalam kelompok, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok. Guru boleh memberikan anak tangga pada siswa, tetapi upayakan mereka sendiri yang memanjatnya menuju tingkat pemahaman dan proses berpikir yang lebih tinggi. Dari beberapa model matematika berupa sistem persamaan linear yang diperoleh dari langkah pemecahan masalah, minta siswa secara individu maupun menuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel. Berdasarkan ciri-ciri tersebut meminta siswa menuliskan konsep sistem persamaan linear dua variabel dengan kata-katanya sendiri. Kemudian mendiskusikan hasilnya dengan teman satu kelompok.*

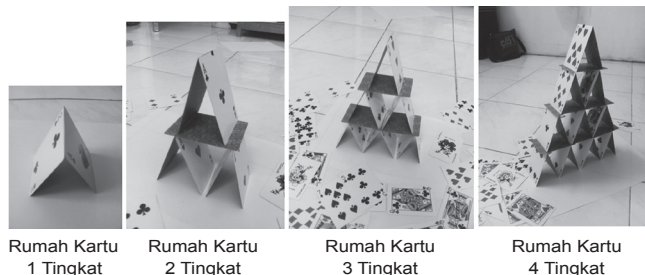
Cermatilah masalah berikut!

Masalah-3.1

Gambar 3.1 Kartu Bergambar

Kartu bergambar dapat dijadikan bahan inspirasi menemukan konsep dan aturan yang terkait dengan sistem persamaan linear melalui masalah yang dirancang.

Anto bermain kartu Remi bersama temannya. Ketika mereka selesai bermain, Budi, adiknya Anto mengumpulkan kartu-kartu tersebut. Kemudian Ia asyik

membangun rumah bertingkat yang diberi nama **Rumah Kartu**. Susunan kartu untuk setiap tingkatnya dapat dicermati pada gambar berikut.

Rumah Kartu 1 Tingkat | Rumah Kartu 2 Tingkat | Rumah Kartu 3 Tingkat | Rumah Kartu 4 Tingkat

Gambar 3.2 Rumah Kartu Bertingkat

Setelah Budi menyusun beberapa rumah kartu bertingkat, ia bertanya dalam pikirannya, bagaimana hubungan di antara banyak kartu dan banyak tingkat rumah. Berapa banyak kartu yang dibutuhkan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat? Dapatkah kamu membantu Budi untuk menyelesaikan masalah tersebut?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apakah tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi? Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan. Selesaikanlah masalah di atas. Agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan dan pikirkan beberapa pertanyaan berikut:

1) informasi apa saja yang kamu temukan dalam masalah tersebut?
2) konsep apa saja yang terkait untuk menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkatnya?
3) bagaimana strategi kamu menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu bergambar yang digunakan?
4) misalkan t menyatakan banyak tingkat rumah dan k banyak kartu yang dipakai untuk setiap tingkat. Dapatkah kamu rumuskan aturan yang memasangkan banyak tingkat rumah dengan banyak kartu bergambar yang digunakan?
5) adakah kesulitan yang harus didiskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antara t dan k?
6) apakah aturan pemasangan yang kamu rumuskan memenuhi situasi penyusunan kartu pada gambar di atas?
7) adakah sistem persamaan linear kamu temukan dari rumusan hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat?
8) dapatkah kamu menjawab permasalahan Budi? Berapa banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.
Rumah kartu bertingkat 1 mengunakan kartu sebanyak 2 buah.
Rumah kartu bertingkat 2 mengunakan kartu sebanyak 7 buah.
Rumah kartu bertingkat 3 mengunakan kartu sebanyak 15 buah.
Rumah kartu bertingkat 4 mengunakan kartu sebanyak 26 buah.

Sehingga banyak tingkat dan banyak kartu dapat dikorespondensikan satu-satu membentuk suatu relasi sama dengan atau banyak kartu dapat dinyatakan dalam banyak tingkat rumah.

- *Minta siswa menemukan aturan yang memasangkan banyak tingkat dengan banyak kartu. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Banyak Tingkat Rumah (*t*)	Banyak Kartu (*k*)	Pola Banyak Kartu
1	2	1 + 1 + 0
2	7	4 + 2 + 1
3	15	9 + 3 + 3
4	26	16 + 4 + 6

- *Arahkan siswa melihat pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4 adalah bilangan tingkat itu sendiri. Kemudian tanyakan pada siswa apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t^2 dan t. Diharapkan siswa menyatakan relasi berikut.*

Misal x dan y adalah bilangan yang akan ditentukan sekaitkan dengan banyak kartu dan banyak tingkat rumah yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$k = x\,t^2 + y\,t$ .... (Persamaan-a)

- *Untuk menentukan nilai x dan y, minta siswa mencermati kembali Gambar-3.2 di atas untuk mendapatkan dua persamaan linear dengan variabel x dan y yang saling terkait. Diharapkan siswa melakukan hal berikut:*

Untuk $t = 1$ dan $k = 2$ diperoleh persamaan $x + y = 2$
Untuk $t = 2$ dan $k = 7$ diperoleh persamaan $4x + 2y = 7$
Dengan demikian kita peroleh dua buah persamaan linear dua variabel, yaitu

$$\begin{cases} x + y = 2 \text{..................(Persamaan-1)} \\ 4x + 2y = 7 \text{..................(Persamaan-2)} \end{cases}$$

- *Minta siswa mengingat kembali materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua buah persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik biarkan siswa yang menentukan cara apa yang mereka gunakan). Kemudian menyuruh siswa menentukan nilai x dan y. Diharapkan siswa memilih salah satu metode dan menggunakannya menentukan nilai variabel x dan y. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode eliminasi.*

Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 4 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 2 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline -2x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- *Minta siswa mengevaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

$$k = xt^2 + yt$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = \dfrac{3}{2}(1)^2 + \dfrac{1}{2}(1) \text{ (pernyataan benar)} \\ 7 = \dfrac{3}{2}(2)^2 + \dfrac{1}{2}(2) \text{ (pernyataan benar)} \\ 15 = \dfrac{3}{2}(3)^2 + \dfrac{1}{2}(3) \text{ (pernyataan benar)} \\ 26 = \dfrac{3}{2}(4)^2 + \dfrac{1}{2}(4) \text{ (pernyataan benar)} \end{array}$$

Dapat disimpulkan, aturan pengaitan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu adalah $k = xt^2 + yt$ dengan nilai konstanta x dan y adalah $\dfrac{3}{2}$ dan $\dfrac{1}{2}$.

- *Selanjutnya mita siswa menentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Untuk $t = 30$, diperoleh $k = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(30)$

$$k = \frac{3}{2}(900) + 15 = 1365$$

Jadi, banyak kartu yang dibutuhkan membangun rumah kartu bertingkat 30 adalah 1365 buah kartu.

Perhatikan masalah berikut yang dirancang pada sebuah rumah adat salah satu suku di Indonesia.

Masalah-3.2

Gambar 3.3 Rumah Adat

Atap rumah terbuat dari ijuk pohon aren (Nira). Perbandingan banyak ijuk yang digunakan untuk menutupi permukaan atap bagian bawah dengan permukaan atap bagian tengah adalah 7 : 4. Perbandingan tinggi permukaan atap bagian bawah dengan tinggi permukaan atap bagian tengah adalah 3 : 2. Coba tentukan berapa panjang alas penampang atap bagian bawah dan tengah.

- *Arahkan siswa memahami masalah, menggali informasi yang terkandung dalam masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar dengan memperhatikan bentuk asli rumah Batak Karo pada gambar di atas.*
  Katakan pada siswa, sebelum kamu memecahkan masalah, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang kamu sudah miliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui. Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam gambar. Beberapa pertanyaan yang perlu dipikirkan agar pekerjaan kamu lebih efektif.
  1) *Adakah konsep dan aturan matematika yang sudah dipelajari di SMP terkait dengan pemecahan masalah yang diberikan ?*
  2) *Bagaimana menggunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika?*
  3) *Perhatikan konsep apa yang melekat pada atap rumah bagian bawah dan tengah!*
  4) *Apa yang dimaksud dua bangun dikatakan kongruen dan lakukan perbandingan panjang sisi-sisi kedua bangun tersebut untuk memperoleh persamaan tinggi penampang atap?*

5) *Adakah sistem persamaan linear yang kamu temukan?*
6) *Bagaimana cara menentukan nilai variabel pada persamaan dengan menggunakan manipulasi aljabar dan metode yang kamu pelajari di SMP?*
7) *Berdasarkan nilai variabel yang kamu peroleh, dapatkah permasalahan di atas dijawab?*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Perbandingan luas penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 7 : 4.

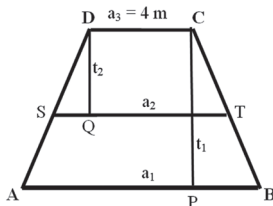
Perbandingan tinggi penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 3 : 2.

Ukuran garis puncak masing-masing atap adalah 4m

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap bagian bawah
b. Panjang alas penampang atap bagian tengah

Penyelesaian:

Diharapkan siswa dapat mengilustrasikan masalah seperti gambar berikut.

- *Menyuruh siswa memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang atap rumah adat tersebut.*

Diharapkan siswa dapat mencermati trapesium $ABCD$ dan melakukan hal berikut.

Misalkan panjang $AB = a_1$, $ST = a_2$, dan $DC = a_3 = 4$m

Misal: Luas penampang atap bawah ($ABCD$) = L_1
Luas penampang atap tengah ($STCD$) = L_2

Karena penampang atap rumah berbentuk trapesium, maka

$$L_1 = \frac{1}{2}(AB + DC) \times \text{tinggi}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_3) \times t_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(ST + DC) \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times (a_2 + a_3) \times t_2$$

Karena perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah adalah 7 : 4, dapat diartikan bahwa $L_1 : L_2 = 7 : 4$.

- *Arahkan siswa melakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan linear.*

$$L_1 : L_2 = 7 : 4 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_3)t_1}{(a_2 + a_3)t_2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 4\text{m dan } t_1 : t_2 = 3 : 2 \quad \Rightarrow \frac{3(a_1 + 4)}{2(a_2 + 4)} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 + 4)}{(a_2 + 4)} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 6a_1 + 24 = 7a_2 + 28$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 7a_2 = 4$$

$\therefore 6a_1 - 7a_2 = 4$ ....(Persamaan-1)

- *Minta siswa mengingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan sebangun dan mencermati bahwa trapesium ABCD dan trapesium STCD adalah sebangun. Dari hasil pengamatan tersebut, siswa diharapkan melakukan matematisasi dan menemukan persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 dengan melakukan hal berikut.*

$$PB = \frac{1}{2}(a_1 - a_3) \text{ dan } SQ = \frac{1}{2}(a_2 - a_3)$$

Karena trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun maka

$$\frac{PB}{SQ} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - 4}{a_2 - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 8 = 3a_2 - 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$\therefore 2a_1 - 3a_2 = -4$ ....(Persamaan-2)

Dengan demikian, kita telah memperoleh dua persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 yang saling terkait, yaitu:

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 \text{...(Persamaan-1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 \text{...(Persamaan-2)} \end{cases}$$

- *Minta siswa mengingat kembali berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik biarkan siswa yang menentukan cara apa yang mereka gunakan) untuk menentukan himpunan penyelesaian dua buah persamaan linear . Kemudian menyuruh siswa menentukan nilai a_1 dan a_2. Diharapkan siswa memilih salah satu metode dan menggunakannya. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode subtitusi.*

Dari Persamaan-1 diperoleh

$$6a_1 - 7a_2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \quad \text{.......................(Persamaan-3)}$$

Subtitusikan persamaan-3 ke persamaan-2, diperoleh

$$a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}\right) - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow \frac{14}{6}a_2 + \frac{8}{6} - \frac{18}{6}a_2 = -\frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{6}a_2 = \frac{-32}{6}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8$$

$$a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} = \frac{56}{6} + \frac{4}{6} = \frac{60}{6}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10$$

Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah $a_1 = 10$m dan panjang alas penampang atap bagian tengah $a_2 = 8$m.

- *Menyuruh siswa menemukan sistem persamaan linear pada langkah pemecahan masalah-1, dan 2, berdasarkan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya di SMP. Diharapkan siswa menemukan 2 sistem persamaan linear berikut.*

- Dari pemecahan masalah-1 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y = 2 \text{.....................(Persamaan-1)} \\ 4x + 2y = 7 \text{.....................(Persamaan-2)} \end{cases}$$

- Dari pemecahan masalah-2 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 \text{.....................(Persamaan-1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 \text{.....................(Persamaan-2)} \end{cases}$$

♦ *Minta siswa mengingat kembali pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari di SMP dan mencermati kembali Persamaan-1 dan 2 pada langkah pemecahan Masalah 3.1 dan 3.2. Kemudian suruh siswa menemukan sistem persamaan linear dua variabel pada langkah pemecahan Masalah 3.1 dan 3.2. Diharapkan siswa mendapatkan dua sistem persamaan linear dua variabel berikut*

- Dari pemecahan masalah-1 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y = 2 \text{.....................(Persamaan-1)} \\ 4x + 2y = 7 \text{.....................(Persamaan-2)} \end{cases}$$

- Dari pemecahan masalah-2 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 \text{.....................(Persamaan-1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 \text{.....................(Persamaan-2)} \end{cases}$$

♦ *Guru meminta siswa menuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya secara kelompok. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri berikut.*

Ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel.

– Merupakan sistem persamaan linear .
– Memuat persamaan dengan dua variabel.

Berdasarkan ciri-ciri sistem persamaan linear di atas, suruh siswa menuliskan pengertian sistem persamaan linear dua variabel dengan kata-katanya sendiri dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan. Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah $a_1 = 10$m dan panjang alas penampang atap bagian tengah $a_2 = 8$m.

Masih ingatkah kamu contoh sistem persamaan linear dua variabel ketika belajar di SMP. Perhatikan kembali setiap langkah penyelesaian Masalah-3.1 dan Masalah-3.2.

- Coba temukan contoh sistem persamaan linear dari setiap permasalahan yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel.
- Temukan ciri-ciri sistem persamaan linear tersebut dan diskusikan dengan temanmu secara klasikal.
- Tuliskan secara individu definisi sistem persamaan linear dua variabel berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan. Kemudian diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal.

Definisi 3.1

Sistem persamaan linear adalah himpunan beberapa persamaan linear yang saling terkait, dengan koefisien-koefisien persamaan adalah bilangan real.

Sistem persamaan linear dua variabel merupakan sistem persaman linear . Berikut ini, didefinisikan sistem persamaan linear dua variabel.

Definisi 3.2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah suatu sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \text{...(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \text{...(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya 0; a_2 dan b_2 tidak keduanya 0.

x, y : variabel
a_1, a_2 : koefisien variabel x
b_1, b_2 : koefisien variabel y
c_1, c_2 : konstanta persamaan

- *Untuk lebih memahami definisi di atas, ajukan contoh dan bukan contoh yang ada pada buku siswa. Minta siswa memberikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel dan cermati pemahaman siswa melalui alasan-alasan yang diberikan.*

Contoh 3.1

Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$. Kedua persamaan ini tidak

membentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab persamaan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ diselesaikan diperoleh persamaan $x + y = 4xy$ tidak linear.

Contoh 3.2

Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Kedua persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab kedua persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x + 0y = 3$ dan $0x + y = -2$ dan pemaknaan setiap variabel pada kedua persamaan adalah sama.

Untuk lebih mendalami sistem persamaan linear di atas cermatilah masalah berikut.

Masalah-3.3

Buktikan bahwa untuk setiap n, pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan.

- *Minta siswa mencoba sendiri untuk membuktikan masalah di atas.*

Untuk membuktikan pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan, maka akan ditunjukkan adanya bilangan bulat s dan t sehingga $(21n + 4)s + (14n + 3)t = 1$.

Bukti:

Pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan, maka FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n +3)$ adalah 1.

Karena FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n +3)$ adalah 1 maka ada bilangan bulat s dan t sedemikian hingga $(21n + 4)s + (14n + 3)t = 1$.

$(21n + 4)s + (14n + 3)t = 1 \Rightarrow 21ns + 14nt + 4s + 3t = 1$

$\Rightarrow 7n(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$

Agar persamaan $7n(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$ dipenuhi untuk setiap n, maka

$3s + 2t = 0$ Pers-1

$4s + 3t = 1$ Pers-2

Dari Persamaan 1 dan 2 diperoleh $s = -2$ dan $t = 3$.

Selanjutnya perhatikan kedua sistem persamaan linear dua variabel berikut.

1. Diberikan $2x + 3y = 0$ dan $4x + 6y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian, misalnya, (3, –2), (–3, 2) dan termasuk (0,0). Di samping itu, kedua persamaan memiliki suku konstan adalah nol dan grafik kedua persamaan berimpit. Apabila sebuah SPLDV mempunyai penyelesaian tidak semuanya nol dikatakan memiliki penyelesaian yang *tak trivial*.
2. Diberikan $3x + 5y = 0$ dan $2x + 7y = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan adalah nol dan mempunyai penyelesaian tunggal; yaitu, untuk $x = 0$, $y = 0$. Apabila sebuah SPLDV hanya memiliki penyelesaian $x = 0$ dan $y = 0$ disebut *penyelesaian trivial*.

Kedua sistem persamaan linear di atas adalah sistem persamaan linear yang homogen.

Definisi 3.3

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear dengan suku konstan sama dengan nol dan memenuhi salah satu dari dua hal berikut:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.

Untuk mendalami pemahaman kamu, mari cermati contoh berikut.

Contoh 3.3

Untuk nilai σ apakah sistem persamaan

$$\left.\begin{aligned}(\sigma - 3)x + y = 0\\ x + (\sigma - 3)y = 0\end{aligned}\right\}$$

mempunyai penyelesaian yang tak trivial?

Penyelesaian

$(\sigma - 3)\, x + y = 0 \iff y = -(\sigma - 3)\, x$.

Kita subtitusikan persamaan $y = -(\sigma - 3)\, x$ ke persamaan $x + (\sigma - 3)\, y = 0$.

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + (\sigma - 3)(-\sigma + 3)\, x = 0 \quad &\Rightarrow x + (-\sigma^2 + 6\sigma - 9)\, x = 0\\ &\Rightarrow x = (\sigma^2 - 6\sigma + 9)\, x \end{aligned}$$

Agar mempunyai penyelesaian tak trivial, maka $x \neq 0$. Sehingga diperoleh

$$(\sigma^2 - 6\sigma + 9) = 1 \Rightarrow \sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (\sigma - 4)(\sigma - 2) = 0$$
$$\Rightarrow \sigma = 4 \text{ atau } \sigma = 2$$

- Ingat makna $a \times b = 0$

Agar sistem persamaan $(\sigma - 3)x + y = 0$ dan $x + (\sigma - 3)y = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial, pastilah $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$.

- Coba uji nilai $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$ ke dalam persamaan. Apakah benar sistem tersebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.

Uji Kompetensi 3.1

1. Angga anak Pak Purwoko memiliki setumpuk kartu. Keseluruhan kartu dapat dipilah menjadi dua bagian menurut bentuknya. Satu jenis berbentuk persegi yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan empat ekor burung. Satu jenis lagi berbentuk segitiga yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan dua ekor burung. Lihat gambar berikut!

Berapa banyak kartu persegi dan segitiga yang harus diambil dari tumpukan kartu agar jumlah gambar kerbau 33 dan jumlah gambar burung 100.

2. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $xy + 5z = 4, y \in R$ dan $2x - 3z = 3$.
   b. $x - 3 = 0$ dan $y - 5 = 1$.

3. Jelaskan mengapa penyelesaian sebuah sistem persamaan linear (*SPL*) adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut: tidak punya penyelesaian, atau memiliki tepat satu penyelesaian atau memiliki tak berhingga penyelesaian!

SOAL TANTANGAN

4. Sebuah perahu yang bergerak searah arus sungai dapat menempuh jarak 46km dalam 2 jam. Jika perahu tersebut bergerak berlawanan dengan arah arus sungai dapat menempuh jarak 51km dalam 3 jam. Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai?

Projek

Cari sebuah SPLDV yang menyatakan pemodelan nyata yang kamu jumpai di lingkungan sekitarmu. Uraikan deskripsi pemodelan tersebut dan langkah-langkah yang kamu ambil untuk dapat menyatakan pemodelan tersebut dalam SPLDV. Kemudian SPLDV yang kamu peroleh diinterpretasikan hasilnya. Buat dalam bentuk laporan dan paparkan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Tiga Variabel

Konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu temukan dari masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budayamu. Dengan cara yang analog kita akan menemukan konsep sistem persamaan linear tiga variabel melalui penyelesaian masalah-masalah nyata. Perbedaan sistem persamaan linear dua variabel dengan sistem persamaan linear tiga variabel terletak pada banyak variabel yang akan ditentukan nilainya. Sekarang cermati beberapa masalah yang diajukan.

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung, ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari Kakeknya. Dalam melakukan pekerjaannya, ia dibantu dua anaknya; yaitu Gede dan Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan.

Gambar 3.4 Ukiran patung dan ornamen

Masalah-3.4

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan, sesuai batas waktu yang diberikan?

- *Arahkan siswa memahami masalah, dan menggali informasi yang terkandung dalam masalah.*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 bulan.
Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen:

Pak Wayan dan Putu adalah 7 bulan
Pak Wayan dan Gede adalah 6 bulan
Putu dan Gede adalah 8 bulan

Ditanya:

a. Berapa lama waktu yang digunakan Pak Wayan, Putu, dan Gede, jika mereka bekerja sendiri-sendiri.
b. Dapatkah waktu pesanan dipenuhi?

- *Bantu siswa melakukan kegiatan matematisasi (kegiatan mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui). Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan (bulan) Pak Wayan adalah x
Waktu yang dibutuhkan (bulan) Putu adalah y
Waktu yang dibutuhkan (bulan) Gede adalah z

Berarti pekerjaan yang dapat diselesaikan Pak Wayan, Putu, dan Gede dengan waktu x, y, dan z, masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$ bagian pekerjaan.

- Bila Pak Wayan dan Putu bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Putu membutuhkan 7 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
$7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$ .... (Persamaan-1)
- Bila Pak Wayan dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Gede membutuhkan 6 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
$6\frac{1}{x}+6\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ .... (Persamaan-2)
- Bila Putu dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Putu dan Gede membutuhkan 8 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
$8\frac{1}{y}+8\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8}$ .... (Persamaan-3)

- Temukan tiga persamaan linear yang saling terkait dari persamaan-1, 2, dan 3 di atas!
- Miasalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Tentukan nilai p, q, dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya! Sebagai alternatif pilihan adalah metode campuran eliminasi dan subtitusi.

> ♦ *Arahkan siswa menemukan tiga buah persamaan linear yang saling terkait dari persamaan a, b, dan c di atas. Diharapkan siswa melakukan kegiatan berikut.*

Misalkan: $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.

Mensubtitusikan pemisalan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$ ke dalam persamaan-a, b, dan c diperoleh tiga persamaan linear yang saling terkait, yaitu

$p + q = \frac{1}{7} \Rightarrow 7p + 7q = 1$ .... (Persamaan-1)

$p+r=\dfrac{1}{6} \Rightarrow 6p+6r=1$ ……………………………… (Persamaan-2)

$q+r=\dfrac{1}{8} \Rightarrow 8q+8r=1$ ……………………………… (Persamaan-3)

- *Minta siswa menentukan nilai p, q dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode campuran eliminasi dan subtitusi.*

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-a dan b diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|} 7p+7q=1 & \times 6 \\ 6p+6r=1 & \times 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42p+42q=6 \\ 42p+42r=7 \quad - \\ \hline 42q-42r=-1 \end{array}$$

$\therefore\ 42q-42r=-1$ ………………………………………….. (Persamaan-1)

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-c dan 1 diperoleh

$$\begin{array}{l|l|} 8q+8r=1 & \times 42 \\ 42q-42r=-1 & \times 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 336q+336r=42 \\ 336q-336r=-8 \quad - \\ \hline 672r=50 \end{array}$$

Dari 672 r = 50 diperoleh $r=\dfrac{50}{672}$

$r=\dfrac{50}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $8q+8r=1$ diperoleh $q=\dfrac{34}{672}$

$q=\dfrac{34}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $7p+7q=1$ diperoleh $p=\dfrac{62}{672}$

Sebelumnya telah kita misalkan

$p=\dfrac{1}{x}$ dan $p=\dfrac{62}{672} \Rightarrow x=\dfrac{672}{62}=10,8$

$q=\dfrac{1}{y}$ dan $q=\dfrac{34}{672} \Rightarrow y=\dfrac{672}{34}=19,76$

$r=\dfrac{1}{z}$ dan $r=\dfrac{50}{672} \Rightarrow z=\dfrac{672}{50}=13,44$

- *Ingatkan kembali siswa pada pengetahuan sebelumnya bahwa waktu yang dibutuhkan menyelesaikan pekerjaan adalah hasil bagi jarak (satu unit pesanan) yang ditempuh dengan kecepatan (keahlian dalam bekerja). Selanjutnya bantu siswa mengevaluasi apakah pesanan dapat dipenuhi dengan batas waktu yang ditentukan, jika Pak Wayan dan kedua anaknya bekerja secara bersama-sama. Diharapkan siswa melakukan kegiatan berikut*

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu dan Gede menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 bulan, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 bulan, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 bulan.

Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\frac{62}{672} + \frac{34}{672} + \frac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

$$t = 4{,}6 \text{ bulan}$$

Karena waktu yang diberikan turis adalah 5 bulan, maka ternyata pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

Cermati masalah petani di daerah Toba berikut ini!

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya adalah sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan coklat, dan sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba). Keterkaitan dan kebergunaan Matematika (khususnya materi sistem persamaan linear) untuk menyelesaikan masalah yang dialami para petani, karyawan, dan para pedagang dapat dicermati lebih jauh. Ketika kita menyelesaikan masalah-masalah tersebut menggunakan kerja matematika (coba-gagal, matematisasi, pemodelan masalah secara Matematika, melakukan abstraksi, idealisasi, dan generalisasi), kita temukan konsep dan aturan-aturan Matematika secara formal. Sekarang mari kita angkat sebuah permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea di Kabupaten Toba Samosir. Permasalahannya terkait pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal.

Masalah-3.5

Gambar 3.5: Pematang sawah Pak Panjaitan

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP} yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Panjaitan sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

- Tiga jenis pupuk: Urea, SS, TSP. Harga per karung untuk setiap jenis pupuk Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00.
- Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.
- Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak dari pupuk SS.
- Dana yang tersedia Rp4.020.000,00.

Ditanya:

Berapa karung untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

- *Bantu siswa melakukan kegiatan matematisasi (kegiatan mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktu yang belum diketahui). Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Misalkan: x adalah banyak pupuk Urea yang dibutuhkan (karung)
y adalah banyak pupuk SS yang dibutuhkan (karung)
z adalah banyak pupuk TSP yang dibutuhkan (karung)

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ .... (Persamaan-1)

$x = 2y$ .... (Persamaan-2)

$750x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000$ .... (Persamaan-3)

- *Minta siswa menentukan nilai x, y dan z dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode eliminasi dan subtitusi. Diharapkan siswa melakukan kegiatan berikut.*

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-1, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $x + y + z = 40 \quad \Rightarrow \quad 2y + y + z = 40$
  $\therefore\ 3y + z = 40$ .... (Persamaan-4)
- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-3, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $75x + 120y + 150z = 4.020 \quad \Rightarrow \quad 150y + 120y + 150z = 4.020$
  $\Rightarrow \quad 270y + 150z = 4.020$
  Sederhanakan persamaan sehingga diperoleh
  $\therefore\ 27y + 15z = 402$ .... (Persamaan-5)

Untuk menentukan nilai y atau z, terapkan metode eliminasi terhadap Persamaan-4 dan Persamaan-5.

$$\begin{array}{l|l|} 3y + z = 40 & \times 15 \\ 27y + 15z = 402 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \quad \begin{array}{rl} 45y + 15z &= 600 \\ 27y + 15z &= 402 \quad - \\ \hline 18y &= 198 \end{array}$$

$18y = 198 \Rightarrow y = 11$
$y = 11$ dan $x = 2y \Rightarrow x = 22$
Dengan subtitusikan $x = 22$ dan $y = 11$ ke persamaan $x + y + z = 40$, diperoleh $z = 7$. Dengan demikian nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$. Dapat diinterpretasikan bahwa banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 sak pupuk Urea, 11 sak pupuk SS, dan 7 sak pupuk TSP.

- *Minta siswa mengingat kembali pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya dan mencermati kembali Persamaan-1, 2 dan 3 pada langkah pemecahan Masalah 3.4 dan 3.5. Kemudian suruh siswa menemukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah pemecahan Masalah 3.4 dan 3.5. Diharapkan siswa mendapatkan sistem persamaan linear tiga variabel berikut.*

- Dari penyelesaian Masalah 3.4 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \text{.. (Persamaan-1)} \\ 6p + 6r = 1 \text{.. (Persamaan-2)} \\ 8q + 8r = 1 \text{.. (Persamaan-3)} \end{cases}$$

- Dari penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sistem persamaan linier

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \text{.. (Persamaan-1)} \\ x = 2y \text{.. (Persamaan-2)} \\ 75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \text{..................... (Persamaan-3)} \end{cases}$$

- *Suruh siswa menuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya dengan teman secara klasikal. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri berikut.*

Ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel.

– Merupakan sistem persamaan linear
– Memuat tiga persamaan linear dengan tiga variabel

- Berdasarkan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel di atas, suruh siswa menuliskan pengertian sistem persamaan linear tiga variabel dengan kata-katanya sendiri dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan.

Definisi 3.4

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi:
Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real; a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

x, y, z : variabel
a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x
b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y
z_1, z_2, z_3 : koefisien variabel z
d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

- Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 3.3

Diberikan tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$.

Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linier. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ diselesaikan diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linier. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 3.4

Diberikan dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

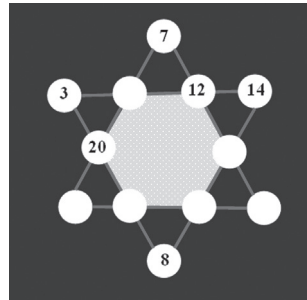
dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) berikut.

1. Diberikan *SPLTV* $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian; misalnya, (3,–2,0), (–3, 2,0) dan termasuk (0,0,0). Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu *SPLTV* tidak semuanya nol, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
2. Diberikan *SPLTV* $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu *SPLTV* memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian trivial $(x = y = z = 0)$.

Sebuah *SPLTV* dengan semua konstanta sama dengan nol disebut *SPLTV* homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka *SPLTV* tersebut tidak homogen. *SPLTV* yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki penyelesaian yang *trivial* atau memiliki banyak penyelesaian *nontrivial* selain satu penyelesaian *trivial*. Minta siswa mencoba menuliskan definisi *SPLTV* yang homogen dan berikan contohnya, selain contoh di atas.

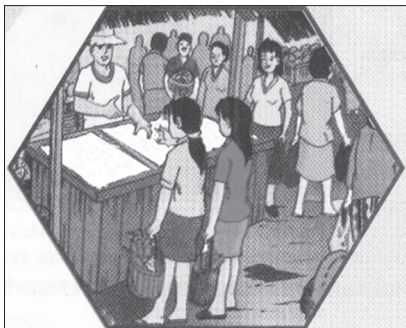
Uji Kompetensi 3.2

1. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $2x + 5y - 2z = 7$, $2x - 4y + 3z = 3$
   b. $x - 2y + 3z = 0$, $y = 1$, dan $x + 5z = 8$
2. Diberikan tiga buah persamaan
   $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=9$; $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$; dan
   $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$
   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan!
   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?
3. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 cm, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?
4.

   Isilah lingkaran kosong pada "bintang ajaib" dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama! Isilah lingkaran kosong pada "bintang ajaib" dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama!
5. Diberikan sistem persamaan linear berikut.
   $x + y + z = 4$
   $z = 2$
   $(t^2 - 4)z = t - 2$
   Berapakah nilai t agar sistem tersebut tidak memiliki penyelesaian, satu penyelesaian dan tak berhingga banyak penyelesaian?
6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$!

7. Diberikan dua persamaan sebagai berikut:

$$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $a^2 + b^2 - c^2$!

8. **SOAL TANTANGAN**

Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri dari 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri dari 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?

Projek

Cari sebuah *SPLTV* yang menyatakan permasalahan nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan permasalahan tersebut dan langkah-langkah yang kamu lakukan untuk menyatakan dalam *SPLTV*. Kemudian selesaikan *SPLTV* yang diperoleh dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan hasil kerja dan paparkan di depan kelas.

3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Dua Variabel

- *Minta siswa mengingat kembali berbagai metode yang digunakan untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) yang telah dipelajari di SMP.*

Di kelas VIII SMP, kamu telah mempelajari berbagai metode menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*). Metode-metode tersebut antara lain: metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan campuran ketiga metode tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari keempat metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulang kembali mempelajari metode-metode tersebut.

1) *Metode Grafik*

Berdasarkan Definisi 3.2, *SPLDV* terbentuk dari dua persamaan linear yang saling terkait. Sebelumnya kamu telah ketahui bahwa grafik persamaan linear dua variabel berupa garis lurus. Pada langkah penyelesaian Masalah 3.1 telah diperoleh sistem persamaan linear dua variabel

$x + y = 2$ .... (Persamaan-1)

$4x + 2y = 7$ .... (Persamaan-2)

Bagaimana menggambar grafik Persamaan-1 dan 2 di atas untuk memperoleh sistem persamaan linear tersebut.

- *Menyuruh siswa menggambarkan grafik Persamaan-1 dan Persamaan-2 menggunakan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya pada bidang koordinat. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas.

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-1

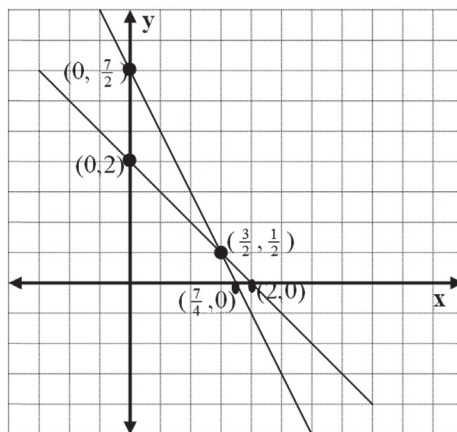
	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik (0, 2) dan (2, 0).

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-2

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $4x + 2y = 7$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, \frac{7}{2})$ dan $(\frac{7}{4}, 0)$.

- Menarik garis lurus dari titik (0, 2) ke titik (2, 0) dan dari titik $(0, \frac{7}{2})$ ke titik $(\frac{7}{4}, 0)$.

Gambar 3.6 Grafik persamaan linear

Berdasarkan gambar grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) *Metode Eliminasi*

Metode eliminasi yang kamu kenal di SMP sudah kita terapkan terhadap *SPLDV* $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ pada langkah penyelesaian Masalah-3.1.
Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7\ - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7\ - \\ \hline -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut.

Berdasarkan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel, bagaimana cara menentukan variabel sistem persamaan linear penyelesaiannya dengan metode eliminasi?

- *Minta siswa menemukan himpunan penyelesaian SPLDV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas.*

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; $a_2$dan b_2 tidak keduanya nol.

Langkah-1:
Lakukan eliminasi terhadap variabel x dari Persamaan-1 dan 2.
Ingat, hal ini dapat dilakukan jika koefisien a_1, dan a_2 tidak nol.

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times a_2 \\ \times a_1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)\,y = a_2c_1 - a_1c_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y = a_2c_1 - a_1c_2 \Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}.$$

Langkah-2:

Lakukan eliminasi terhadap variabel y dari Persamaan-1 dan 2

Ingat, hal ini dapat dilakukan jikan koefisien b_1 dan b_2 keduanya tidak nol.

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times b_2 \\ \times b_1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2 \quad - \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \Rightarrow x = \frac{(b_2 c_1 - b_1 c_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}.$$

> Sistem persamaan linear dengan dua peubah x dan y adalah
>
> $$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}$$
>
> dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.
>
> Himpunan penyelesaian adalah $\left\{ \left(\frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}, \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)} \right) \right\}$.

- Menyuruh siswa menunjukkan/menguji kebenaran bahwa pasangan berurutan $x = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$ dan $y = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$ merupakan solusi sistem persamaan linear dengan mengganti nilai x dan y pada persamaan $a_1 x + b_1 y = c_1$ dan $a_2 x + b_2 y = c_2$.

3) *Metode Substitusi*

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \text{..(Persamaan-1)} \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \text{..(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1, dan b_1 tidak keduanya nol; a_2, dan b_2 tidak keduanya nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$a_1 x + b_1 y = c_1$ dan $a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1}$

$x = -\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1}$ subtitusi ke persamaan $a_2 x + b_2 y = c_2$ dan diperoleh

$$\Rightarrow -\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} + b_2 y = c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{a_2 b_1}{a_1} y + \frac{a_2 c_1}{a_1} + \frac{a_1 b_2}{a_1} y = \frac{a_1 c_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1} y = \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}.$$

$y = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1}$ dan diperoleh

$$x = -\frac{b_1 (a_2 c_1 - a_1 c_2)}{a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2)} + \frac{c_1}{a_1} \quad \Rightarrow x = \frac{b_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2)} + \frac{c_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{ \left(\frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}, \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)} \right) \right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut dengan mengikuti langkah metode substitusi di atas.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode substitusi?

- *Mengarahkan siswa menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode substitusi di atas.*

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \text{.................... (Persamaan-1)} \\ a_2x+b_2y=c_2 \text{.................... (Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1, dan b_1 tidak keduanya nol; a_2, dan b_2 tidak keduanya nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$

$x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ subtitusi ke persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ dan diperoleh

$$\Rightarrow a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{a_2b_1}{a_1}y + \frac{a_2c_1}{a_1} + \frac{a_1c_2}{a_1}y = \frac{a_2c_3}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1}y = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ dan diperoleh

$$x = -\frac{b_1(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1}{a_1} \Rightarrow x = \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{\left(\dfrac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}, \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}\right)\right\}$.

- *Menyuruh siswa membandingkan penentuan himpunan penyelesaian SPLDV melalui metode eliminasi dan substitusi. Diharapkan siswa berkesimpulan hasilnya sama.*

4) *Metode Eliminasi dan Substitusi*

Masalah-3.9

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi?

- *Minta siswa menentukan himpunan penyelesaian SPLDV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan metode campuran eliminasi dan substitusi.*

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{Persamaan-1}) \\ a_2x + b_2y = c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{Persamaan-2}) \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Langkah-1:
Lakukan eliminasi terhadap variabel x

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y = c_1 & \times a_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times a_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)\,y = a_2c_1 - a_1c_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y = a_2c_1 - a_1c_2 \Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}.$$

Langkah-2:
Lakukan substitusi nilai y terhadap salah satu persamaan

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke dalam Persamaan-1, $a_1x + b_1y = c_1$, dan diperoleh

$$a_1x + b_1\left(\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}\right) = c_1 \Rightarrow a_1x = c_1 - b_1\left(\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{c_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}{a_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)} + b_1\left(\frac{\left(a_2c_1 - a_1c_2\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{\left(\frac{\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}, \frac{\left(a_2c_1 - a_1c_2\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}\right)\right\}$.

Diskusi

Minta siswa mendiskusikan kedudukan kedua garis dalam satu sumbu kordinat, tentukan berapa kemungkinan penyelesaian suatu *SPLDV*. Selanjutnya minta siswa memberi contoh *SPLDV* untuk tiga kasus, gambarkan grafiknya dalam sumbu kordinat dan tentukan penyelesaiannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Sehingga penentuan himpunan penyelesaian *SPLTV* dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian *SPLDV*, kecuali dengan metode grafik. Cara lain yang dapat kamu gunakan selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran eliminasi substitusi (kamu coba sendiri) untuk menentukan penyelesaian *SPLTV* adalah cara determinan, menggunakan invers matriks yang akan kamu pelajari di kelas XII. Sekarang kita akan temukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus.

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode Sarrus?

- *Menyuruh siswa menentukan himpunan penyelesaian SPLTV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode Sarrus.*

Berdasarkan Defenisi 3.4, bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \text{..............(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \text{..............(Persamaan-2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \text{..............(Persamaan-3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real; a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah-1: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-2

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times a_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2$ .... (Persamaan-4)

Langkah-2: Eliminasi variabel x dari Persamaan-1 dan Persamaan-3

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times a_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \quad - \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3$ .... (Persamaan-5)

Langkah-3: Eliminasi variabel y dari Persamaan-4 dan Persamaan-5

$$\begin{array}{l|l|} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-4 terhadap Persamaan-5 dan hasil perkalian koefisien variabel y pada Persamaan-5 terhadap Persamaan-4 maka diperoleh

$$z = \frac{\left(\left(a_2d_1 - a_1d_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3d_1 - a_1d_3\right)\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)\right)}{\left(\left(a_2c - a_1c_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3c_1 - a_1c_3\right)\left(a_2b - a_1b_2\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2\right) - \left(a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_2b_1c_2\right) - \left(a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2\right) - \left(a_1b_2d_3 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2\right) - \left(a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_3b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3\right) - \left(a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1\right)\right)}{\left(\left(a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3\right) - \left(a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1\right)\right)}.$$

- *Bimbing siswa melakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui).*

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}}$$

Petunjuk:
- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

- *Meminta siswa menemukan pola secara analogi untuk memperoleh nilai variabel x dan y dengan mencermati cara penentuan nilai variabel z. Diharapkan siswa.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk *x*, *y*, dan *z* di atas. Ketiga ciri-ciri tersebut mudah diingat. Sehingga memudahkan dalam mencari penyelesaian *SPLTV*. Sebelum metode Sarrus digunakan, *SPLTV* harus dibentuk dalam standar.

Pada langkah penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ .... (Persamaan-1)
$x = 2y$ .... (Persamaan-2)
$75 + 120y + 150z = 4.020$ .... (Persamaan-3)

- *Meminta siswa menerapkan metode Sarrus untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLTV tersebut dan membandingkannya dengan himpunan penyelesaian yang telah diperoleh sebelumnya. Diharapkan siswa melakukan kegiatan berikut.*

Ingat untuk menggunakan metode Sarrus semua variabel harus pada ruas kiri, dan semua konstanta berada pada ruas kanan. Untuk itu *SPLTV* di atas diubah menjadi

$x + y + z = 40$ .... (Persamaan-1)
$x - 2y = 0$ ....(Persamaan-2)
$75 + 120y + 150z = 4.020$ .... (Persamaan-3

Berdasarkan *SPLTV* di atas diperoleh

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = 75$
$b_1 = 1$ $\quad b_2 = -2$ $\quad b_3 = 120$
$c_1 = 1$ $\quad c_2 = 0$ $\quad c_3 = 150$
$d_1 = 40$ $\quad d_2 = 0$ $\quad d_3 = 4020.$

- *Bimbing siswa menerapkan metode Sarrus untuk menentukan nilai variabel x, y, dan z. Diarahkan siswa melakukan hal berikut.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 & 40 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 4020 & 120 & 150 & 4020 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{vmatrix}} = \frac{(-8040+0+0)-(-12000+0+0)}{(-150+0+150)-(-300+0+120)} = \frac{3960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75 & 4020 & 150 & 75 & 4020 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{vmatrix}} = \frac{(0+0+6000)-(0+0+4020)}{180} = \frac{1980}{180} = 11$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 40 & \vdots & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & -2\\ 75 & 120 & 4020 & \vdots & 75 & 120\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & -2\\ 75 & 120 & 150 & \vdots & 75 & 120\end{vmatrix}}=\frac{(-6000+0+4020)-(-8040+4800)}{180}=\frac{1260}{180}=7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian *SPLTV* tersebut adalah $H = \{(22,11,7)\}$. Ternyata hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode eliminasi dan substitusi sebelumnya.

- *Minta siswa mengingat kembali pengetahuan tentang himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear yang telah dipelajari di SMP dan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear. Suruh siswa menuliskan ciri-ciri suatu himpunan merupakan himpunan penyelesaian SPL dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri himpunan penyelesaian sebagai berikut.*

Ciri-ciri himpunan penyelesaian suatu *SPL*

– Suatu himpunan yang anggotanya pasangan terurut dari variabel-variabel persamaan (misal x, y, dan z).

– Nilai variabel-variabel tersebut (misal x, y, dan z) memenuhi setiap persamaan pada *SPL* tersebut.

Berdasarkan ciri-ciri himpunan penyelesaian SPL di atas, minta siswa menuliskan dengan kata-katanya sendiri pengertian himpunan penyelesaian SPL dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan.

Definisi 3.5

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.6

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear.

Sedangkan untuk *SPLDV* dan *SPLTV*, himpunan penyelesain sistem persamaan linear tersebut, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.8

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah himpunan semua triple terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 3.3

1. Tiga tukang cat, Joni, Deni dan Ari, bekerja secara bersama-sama, dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang ini bekerja mengecat rumah serupa ini selama 4 jam kerja, setelah itu Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang, jika bekerja sendirian!
2. Sebuah bilangan terdiri dari atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih dari pada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut!
3. Sebuah pabrik memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu?
4. Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear berikut ini tanpa menggunakan cara aljabar, melainkan melalui metode grafik!

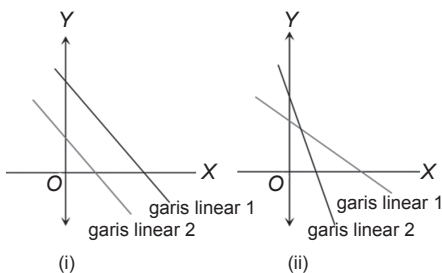
i. $x - y = 3$
$5x + 3y = 9$

ii. $2x - y = 0$
$7x + 2y = 11$

iii. $3x - 2y = 2$
$-x + 5y = 21$

iv. $4x - \frac{1}{2}y = 8$
$12x + 7y = -4$

5. Kembali perhatikan sistem persamaan linear dua variabel,
$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$
Mungkinkah sistem tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian? Jika ya, tentukan syaratnya dan gambarkan!

6. Perhatikan kedua grafik sistem persamaan linear di bawah ini!

Gambar (i) dan (ii) merupakan grafik sistem persamaan linear dua variabel,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a) Tentukan syarat yang dimiliki sistem supaya memiliki grafik seperti gambar (i) dan (ii)!
b) Jelaskanlah perbedaan himpunan penyelesaian grafik (i) dan (ii)!

7. Diberikan sistem persamaan linear tiga variabel,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Tentukan syarat yang dipenuhi sistem supaya memiliki solusi tunggal, memiliki banyak solusi, dan tidak memiliki solusi!

8.

Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti simbol-simbol.

9. Diketahui $\frac{xy}{x+y} = a$. $\frac{xz}{x+z} = b$ dan $\frac{yz}{y+z} = c$, dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $c \neq 0$. Tentukan nilai $x = ...$!

10. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka tentukan nilai
$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$
$= ...$!

11. Nilai-nilai a, b, dan c memenuhi persamaan-persamaan berikut $\frac{25ab}{a+b} = \frac{1}{2}$, $\frac{15bc}{b+c} = -1$, dan $\frac{5ac}{a+c} = -\frac{1}{3}$.

    Hitunglah $(a - b)^c$.

12.

    Trisna bersama dengan Ayah dan Kakek sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika Ayah dan kakek menyelesaikan pekerjaan itu, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, Ayah, dan Kakek untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

13. Diberi dua bilangan. Bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Temukanlah bilangan tersebut.

14 Dengan menggunakan kertas berpetak, tentukanlah himpunan penyelesaian melalui grafik setiap sistem persamaan berikut ini!

   i. $3x + 2y = 9$
      $x + 3y = 10$

   ii. $4x + y = 6$
       $3x + 2y = 10$

4. Sistem Pertidaksamaan linear Dua Variabel

Masalah-3.11

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000 m². Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100 m² dan untuk membangun rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75 m². Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi maka:

1) bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun; dan
2) gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: x : banyak rumah tipe *A* yang akan dibangun
y : banyak rumah tipe *B* yang akan dibangun

1) Banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun
   a) Keterbatasan yang dimiliki Pak Rendi adalah:
      Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe *A* dan tipe *B* di atas tanah seluas 10.000m² ditentukan oleh pertidaksamaan:
      $100x + 75y \leq 10.1000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:
      $4x + 3y \leq 400$ ....(1)
   b) Jumlah rumah yang akan dibangun
      $x + y \leq 125$.. (2)

   Dari kedua keterbatasan di atas, (pertidaksamaan 1 dan pertidaksamaan 2) banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun dihitung dengan menggunakan konsep sistem persamaan linear dua variabel seperti berikut.

$$\begin{array}{lll} 4x + 3y = 400 & |\times 1| \rightarrow & 4x + 3y = 400 \\ x + y = 125 & |\times 3| \rightarrow & \underline{3x + 3y = 375} \; - \\ & & x = 25 \end{array}$$

untuk $x = 1$, maka $y = 125 - x$
$y = 125 - 25$
$= 100$

Hal ini berarti: dengan keterbatasan yang ada, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

- *Organisasikan siswa dalam kelompok belajar dalam memecahkan masalah. Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan yang ada.*

2) Grafik daerah penyelesaian pada diagram kartesius

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$ maka $x = \frac{400}{4} = 100$.

jika $x = 0$, maka $y = 133,3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0, 133,3) dan memotong sumbu y di titik (100, 0).

Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$

jika $x = 0$ maka $y = 125$

Maka gari $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0,125) dan memotong sumbu x di titik (125, 0).

Langkah 2

Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$. Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sebarang titik misal $P(x,y)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang memuat titik $P(x,y)$ merupakan daerah penyelesaiannya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.

Apakah kita perlu membatasi nilai $x > 0$ dan nilai $y > 0$? Mengapa? Berikan penjelasanmu.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.
Dari Gambar 3.7, daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.
Mempelajari sistem pertidaksamaan linear dua variabel berguna untuk menentukan nilai maksimum suatu fungsi dengan domain suatu himpunan tertentu. Perhatikan contoh berikut!

Gambar 3.7 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linier

Contoh 3.5

Jika nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ pada himpunan

$A = \{x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6{,}3\ x + y \leq a\}$ adalah 4, maka nilai $a = \ldots$?

Penyelesaian

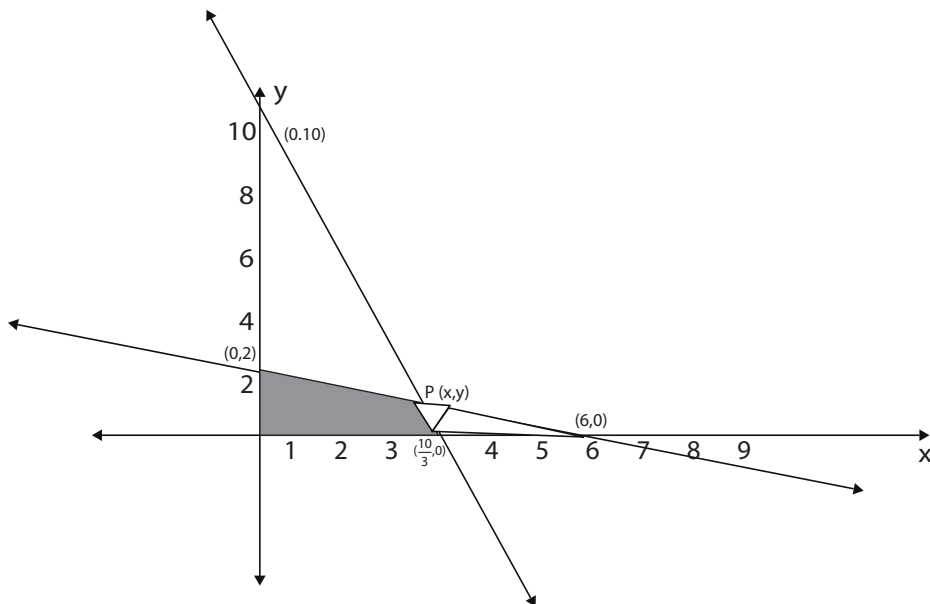
Misalkan $f(x,y) = x + y$
Pertidaksamaan-1: $x + 3y \leq 6$
Pertidaksamaan-2: $3x + y \leq a$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.

- *Arahkan siswa menggambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaan x + 3y =0 dan 3x + y =a dan daerah fungsi f yang dibatasi kedua pertidaksamaan yang diketahui pada soal.*

Mengingat gradien dari $f(x,y) = x + y$ adalah $m = -1$, maka f akan mencapai maksimum di titik P. Titik P adalah perpotongan dari garis $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$. Jadi diperoleh

$x_P = \dfrac{3a-6}{8}$ dan $y_P = \dfrac{18-a}{8}$.

Nnilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4, berarti

$$\frac{3a-6}{8} + \frac{18-a}{8} = 4 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

Gambar 3.8 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linear $x + 3y \leq 6$, $3x + y \leq a$

Mengingat gradien dari $f(x,y) = x + y$ adalah $m = -1$, maka f akan mencapai maksimum di titik P. Titik P adalah perpotongan dari garis $x + 3y = 6$ dan $3x + y = a$. Jadi diperoleh

$$x_P = \frac{3a-6}{8} \text{ dan } y_P = \frac{18-a}{8}.$$

Karena nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4, maka

$$\frac{3a-6}{8} + \frac{18-a}{8} = 4 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10.$$

Dengan demikian, agar nilai maksimum $f(x,y) = x + y$ adalah 4 maka nilai $a = 10$.

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, mari kita tetapkan konsep sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.

Definisi 3.9

1. Sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan pertidaksamaan linear yang saling terkait dengan koefisien variabelnya bilangan-bilangan real.
2. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.

Definisi 3.10

Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan semua pasangan titik (x,y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Definisi 3.11

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Uji Kompetensi 3.4

1. Diberikan sistem pertidaksamaan linier:
   $x - y \geq 3$
   $5x + 3y \geq 9$
   a) Gambarkan grafik pertidak-samaan pada sistem tersebut!
   b) Tentukanlah himpunan penye-lesaian sistem tersebut, dengan syarat tambahan $x > 0$ dan $y < 0$!
   c) Selanjutnya dapatkah kamu menentukan himpunan penye-lesaian sistem tersebut untuk syarat $x < 0$ dan $y > 0$? Jelaskan!

2. Misalkan p adalah jumlah maksimum dari himpunan penyelesaian yang memenuhi sistem di bawah ini.
   $2x + 5y \leq 600$
   $4x + 3y \leq 530$
   $2x + y \leq 240$
   a) Gambarkanlah pertidaksamaan sistem linear tersebut!
   b) Tentukanlah nilai p!

3. Produksi Tani.
   Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 Kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 Kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 Kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan

petani dari 1 kuintal padi adalah Rp32.000,00 sedang dari 1 kuintal jagung Rp20.000,00, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

3. Jika diberikan sistem pertidaksamaan linear seperti berikut ini,

   $a_1x + b_1y \geq c_1$ dan $x \geq 0$

   $a_2x + b_2y \geq c_2$ dan $y \geq 0$.

   a) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem memiliki solusi tunggal?

   b) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem tidak memiliki solusi?

4. Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Masing-masing memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 3.1. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp200,00 dan Fluon Rp300,00 per kapsul, berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Unsur	Perkapsul	
	Fluin	Fluin
Aspirin	2	1
Bikorbonat	5	8
Kodein	1	6

Projek

Bersama temanmu amati permasalahan di sekitarmu atau dari sumber lain (buku, internet, dan lain-lain) yang dapat dinyatakan dalam sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Formulasikan masalah tersebut dengan mendefinisikan variabel-variabel terkait, mencari persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan hubungan antar variabel tersebut, selesaikan sistem yang kamu peroleh, dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan atas kegiatanmu ini dan paparkan hasilnya di depan kelas.

D. PENUTUP

Berberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari seringkali menjadi sebuah model sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linier. Konsep sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan ini didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan dalam sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.
2. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah himpunan semua nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut.
3. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstantanya adalah nol dan salah satu dari dua hal berikut dipenuhi.
   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
   b. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga banyaknya anggota himpunan penyelesaian yang tak trivial sebagai tambahan penyelesaian trivial.
4. Apabila penyelesaian sebuah sistem persamaan linear semuanya nilai variabelnya adalah nol, maka penyelesaian tersebut dikatakan penyelesaian trivial. Misal diberikan sistem persamaan linear $3x + 5y + z = 0$ dan $2x + 7y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstanta adalah nol dan mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$.
5. Apabila sebuah sistem persamaan linear mempunyai anggota himpunan penyelesaiannya dari nilai variabel yang tidak semuanya nol disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
6. Secara tafsiran geometri dari selesaian suatu sistem persamaan linear, diberikan sistem persamaan dengan 2 persamaan dan 2 variabel, sebagai berikut.
   $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$, dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 anggota bilangan real, dengan a_1 dan a_2 tidak keduanya nol dan b_1 dan b_2 tidak keduanya nol.
   Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis, misal garis g_1 dan garis g_2. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut, maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis g_1 dan garis g_2. Berdasarkan hal itu, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu
   (a) garis g_1 dan garis g_2 sejajar dan tidak berpotongan, yaitu jika tidak terdapat titik perpotongan sehingga sistem tidak mempunyai penyelesaian.

(b) garis g_1 dan garis g_2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai tepat satu (tunggal) penyelesaian.

(c) garis g_1 dan garis g_2 berimpit, artinya terdapat tak terhingga banyak titik perpotongan. Dalam hal ini sistem mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

7. Sistem Persamaan linear (*SPL*) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai selesaian, mempunyai satu selesaian dan mempunyai tak terhingga banyak selesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear adalah prasyarat mutlak mempelajari bahasan matriks dan program linear. Matriks adalah bentuk lain sebuah sistem persamaan linear, artinya setiap sistem persamaan linear dapat disajikan dalam bentuk matriks. Kita akan menemukan konsep dan sifat-sifat matriks melalui penyelesaian masalah nyata. Selanjutnya kita lakukan operasi hitung pada dua atau lebih matriks dan menentukan determinannya. Sifat-sifat matriks terhadap operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

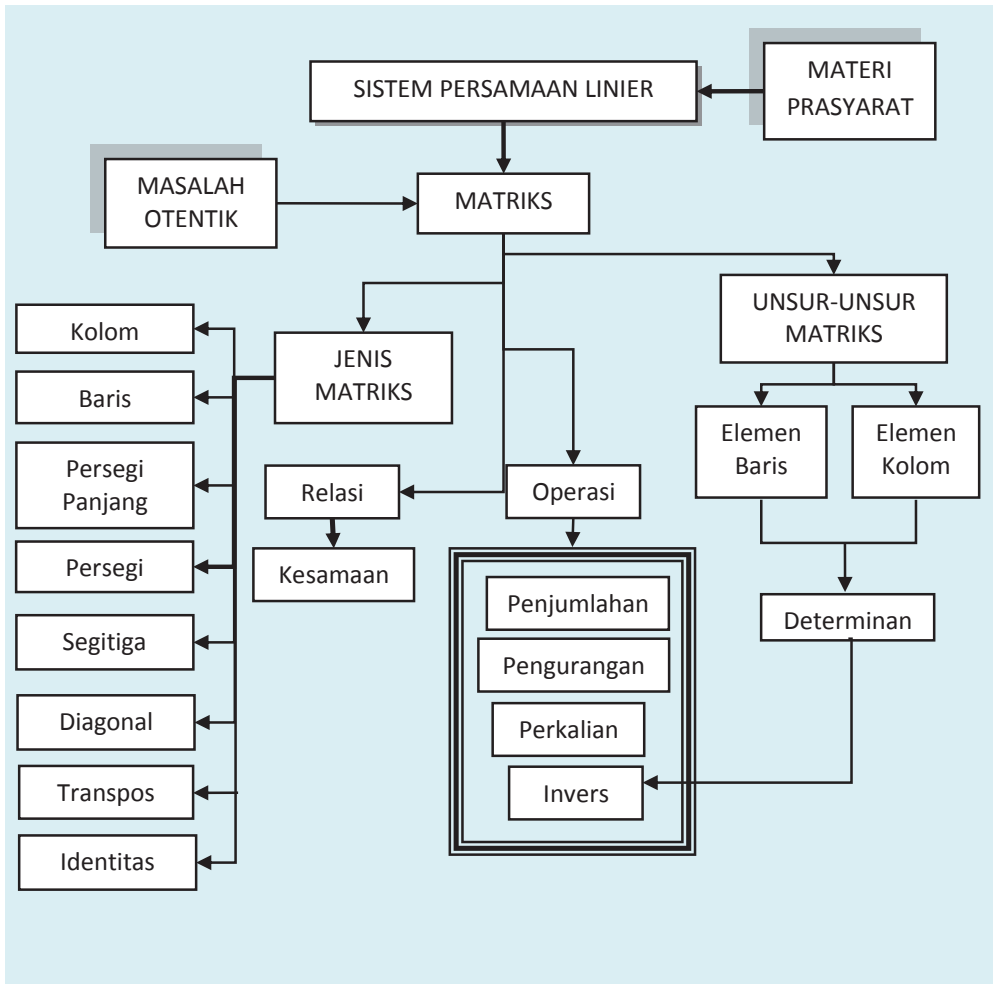
Matriks

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata; 5. memahami operasi sederhana matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • melatih berpikir kritis dan kreatif; • mengamati keteraturan data; • berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah; • berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka; • mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Elemen Matriks*
- *Ordo Matriks*
- *Matriks Persegi*
- *Matriks Identitas*
- *Transpos Matriks*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Matriks

Informasi yang terdapat dalam suatu koran atau majalah tidak senantiasa berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf, tetapi ada kalanya disampaikan dalam bentuk sebuah tabel. Tampilan informasi dalam suatu tabel lebih tersusun baik dibandingkan dalam bentuk paragraf. Hal seperti ini sering kita temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja.

- *Arahkan siswa menemukan konsep matriks dari berbagai situasi nyata yang dekat dengan kehidupan siswa. Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan kebergunaan mempelajari matriks dalam kehidupan.*

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen akhir Liga Super Indonesia, data perolehan nilai dan absensi siswa, maupun brosur harga jual sepeda motor.

Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, mari kita cermati uraian berikut ini. Diketahui data hasil penjualan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya, dari sebuah agen tiket, selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1: Keterangan situasi tiket penerbangan ke Medan dan Surabaya

Tujuan	Hari ke	I	II	III	IV
Medan		3	4	2	5
Surabaya		7	1	3	2

Pada saat kamu membaca tabel di atas maka hal pertama yang kamu perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk tiap-tiap kota setiap harinya. Data tersebut, dapat kamu sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat kamu lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Berikut ini akan kita cermati lebih dalam lagi mengenai matriks dari masalah-masalah kehidupan kita sehari-hari.

Masalah-4.1

Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Masihkah kamu ingat posisi duduk sewaktu kamu mengikuti Ujian Nasional SMP? Maksimal siswa dalam satu ruang ujian hanya 20 peserta, biasanya disusun dalam lima baris, empat kolom, seperti yang disajikan pada Gambar 4.1.

Untuk memudahkan pengaturan peserta ujian dalam suatu ruangan, pihak sekolah menempatkan siswa dalam ruang ujian dengan pola nomor ujian melalui Nomor Induk Siswa (NIS), yang ditempelkan di tempat duduk siswa. Misalnya, nomor ujian peserta di ruang A adalah NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, NIS siswa-22, NIS siswa-23,... , NIS siswa-44, NIS siswa-51, NIS siswa-52, NIS siswa-53, NIS siswa-54. Jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-12, itu berarti posisi peserta saat ujian berada pada baris ke-1 lajur ke-2, dan jika nomor ujian peserta adalah NIS siswa-34, artinya posisi peserta tersebut saat ujian berada pada baris ke-3 kolom ke-4. Demikian pula, jika nomor peserta ujian adalah NIS siswa-51, artinya posisi siswa saat ujian berada pada baris ke-5 kolom ke-1. Tentunya, untuk setiap peserta ujian yang memiliki nomor ujian NIS siswa-11, NIS siswa-12, NIS siswa-13, NIS siswa-14, NIS siswa-21, …, NIS siswa-53, dan NIS siswa-54 dengan mudah memahami posisi mereka dalam ruang ujian tersebut. Tentukan susunan peserta ujian ditinjau dari pola Nomor Induk Siswa (NIS)!

Alternatif Penyelesaian

Susunan peserta ujian jika dilihat dari NIS, dalam bentuk baris dan kolom, dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Meja Pengawas Ujian

$$\begin{bmatrix} \text{NIS 11} & \text{NIS 12} & \text{NIS 13} & \text{NIS 14} \\ \text{NIS 21} & \text{NIS 22} & \text{NIS 23} & \text{NIS 24} \\ \text{NIS 31} & \text{NIS 32} & \text{NIS 33} & \text{NIS 34} \\ \text{NIS 41} & \text{NIS 42} & \text{NIS 43} & \text{NIS 44} \\ \text{NIS 51} & \text{NIS 52} & \text{NIS 53} & \text{NIS 54} \end{bmatrix}$$

Gambar 4.2. Denah posisi tempat duduk peserta ujian berdasarkan NIS

Masalah-4.2

Masalah lain yang terkait dengan susunan dapat kita amati susunan barang-barang pada suatu supermarket. Tentunya, setiap manager supermarket memiliki aturan untuk menempatkan setiap koleksi barang yang tersedia. Coba kita perhatikan gambar berikut ini!

Gambar 4.3 Ruang koleksi barang-barang pada suatu supermarket

Tentukanlah posisi koleksi beras dan tepung pada susunan di atas!

Alternatif Penyelesaian

Gambar di atas mendeskripsikan ruangan koleksi barang-barang suatu supermarket, yang terdiri atas tiga baris, 4 kolom. Koleksi beras dan tepung terdapat pada baris ke-3, kolom ke-2. Koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-4 adalah koleksi bumbu dapur.

- *Guru memeriksa hasil kerjaan siswa, mengenai posisi setiap koleksi barang dalam ruang tersebut.*
- *Guru menjelaskan bagaimana susunan koleksi barang supermarket jika tersusun bertingkat.*

Masalah-4.3

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Bogor	126 km	Bandung–Semarang	367 km
Bandung–Cirebon	130 km	Bandung–Yogyakarta	428 km

Bandung–Surabaya	675 km	Bogor–Cirebon	256 km
Bogor–Surabaya	801 km	Cirebon–Yogyakarta	317 km
Bogor–Semarang	493 km	Surabaya–Semarang	308 km
Bogor–Yogyakarta	554 km	Surabaya–Yogyakarta	327 km
Cirebon–Surabaya	545 km	Semarang–Yogyakarta	115 km
Cirebon–Semarang	237 km		

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak-jarak antar kota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

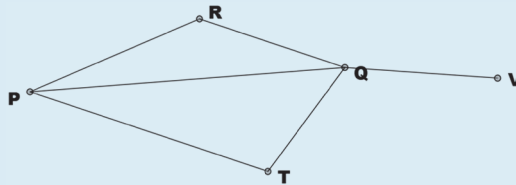
	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	125	256	493	554	801	0

Dari tampilan di atas, dia cukup jelas mengetahui jarak antar kota tujuan wisata. Jika kita ingin menampilkan susunan jarak-jarak tersebut, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 130 & 367 & 428 & 675 & 126 \\ 130 & 0 & 237 & 317 & 545 & 256 \\ 367 & 237 & 0 & 115 & 308 & 493 \\ 428 & 317 & 115 & 0 & 327 & 554 \\ 675 & 545 & 308 & 437 & 0 & 801 \\ 126 & 256 & 493 & 554 & 801 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antar kota di pulau Jawa ini, terdiri dari 6 baris dan 6 kolom.

Masalah-4.4

Pak Margono yang tinggal di kota *P* memiliki usaha jasa pengiriman barang. Suatu ketika, perusahaan pak Margono menerima order mengirim barang ke kota *V*. Jika setiap dua kota yang terhubungkan diberi bobot 1, sedangkan dua kota yang tidak terhubungkan diberi bobot 0. Nyatakanlah persoalan pengiriman barang tersebut dalam bentuk matriks.

Gambar 4.4 Diagram rute pengiriman barang

Alternatif Penyelesaian

Kata kunci pada persoalan ini adalah keterhubungan antar dua kota, secara matematis, fungsi keterhubungan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk} \quad i = j \\ 1, & \text{untuk} \quad i \neq j \end{cases}$$

Dari gambar di atas, kota *P* terhubungan dengan semua kota, kecuali ke kota *V*. Keterhubungan antar dua kota ini, dapat kita nyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

- *Guru mengerjakan lintasan mana yang terpendek untuk membawa barang dari kota P ke kota V!*

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} P & R & Q & T & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} P \\ R \\ Q \\ T \\ V \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \text{Susunan angka-angka berbentuk persegi.}$$

Matriks representasi keterhubungan antar dua kota, disebut matriks *X* yang anggota-anggotanya terdiri dari angka 1 dan 0.

Dari empat masalah di atas, masalah yang dikaji adalah aturan susunan posisi setiap objek dan benda dinyatakan dalam aturan baris dan kolom. Banyak baris dan kolom dikondisikan pada kajian objek yang sedang diamati. Objek-objek yang disusun pada setiap baris dan kolom harus memiliki karakter yang sama.

Secara umum, matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa " ( )" atau kurung siku " [ ] ".

Biasanya pelabelan suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A, B, C, D, ..., dan seterusnya. Secara umum, diberikan matriks A,

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \rightarrow \text{baris ke-3} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-}m \end{matrix}$$

kolom ke-m

kolom ke-3

kolom ke-2

kolom ke-1

a_{ij} bilangan real, menyatakan elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j, $i = 1, 2, 3, .., m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$A_{m \times n}$: m menyatakan banyak baris matriks A.
n menyatakan banyak kolom matriks A.

Notasi $m \times n$, menyatakan ordo (ukuran) matriks A, yang menyatakan banyak baris dan kolom matriks A. Ingat, m menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom matriks A. Jadi, jika diperhatikan ordo suatu matriks, dapat diketahui banyaknya elemen pada matriks itu.

Masalah-4.5

Tentukanlah matriks 4×4, $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $a_{ij} = i^{(j-1)}$!

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Matriks } A_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$ nilai a_{ij}, ditentukan dengan $a_{ij} = i^{j-1}$.

- $a_{11} = 1^{1-1} = 1$
- $a_{12} = 1^{2-1} = 1$
- $a_{13} = 1^{3-1} = 1$
- $a_{14} = 1^{4-1} = 1$
- $a_{21} = 2^{1-1} = 1$
- $a_{22} = 2^{2-1} = 2$
- $a_{23} = 2^{3-1} = 4$
- $a_{24} = 2^{4-1} = 8$
- $a_{31} = 3^{1-1} = 1$
- $a_{32} = 3^{2-1} = 3$
- $a_{33} = 3^{3-1} = 9$
- $a_{34} = 3^{4-1} = 27$
- $a_{41} = 4^{1-1} = 1$
- $a_{42} = 4^{2-1} = 4$
- $a_{43} = 4^{3-1} = 16$
- $a_{44} = 4^{3-1} = 64$

Jadi, matriks A berordo 4×4 yang dimaksud adalah:

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.1

Teguh, siswa kelas X SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times3}=\begin{bmatrix}46 & 43 & 22\\ 19 & 14 & 12\end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2\times3}$ adalah matriks persegipanjang dengan berordo 2×3.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times2}=\begin{bmatrix}46 & 43\\ 22 & 19\\ 14 & 12\end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times2}$ adalah matriks berordo 3×2.

- *Guru memberikan susunan matriks yang lain, minimal dua cara dengan cara yang berbeda.*

2. Jenis-Jenis Matriks

Contoh 4.1 di atas, menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri dari satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini, $1 \times n$, dengan n banyak kolom pada matriks tersebut.

$T_{1\times2} =$ [46 43], matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1\times4} =$ [22 19 14 12], matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri dari satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak baris pada kolom matriks tersebut. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{2\times1}=\begin{bmatrix}43\\ 22\\ 19\end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1, yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$$T_{5\times1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix},$$ matriks kolom berordo 5 × 1, yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.

c. Matriks Persegipanjang

Matriks persegipanjang adalah matriks yang banyak barisnya tidak sama dengan banyak kolomnya. Matriks seperti ini memiliki ordo $m \times n$.

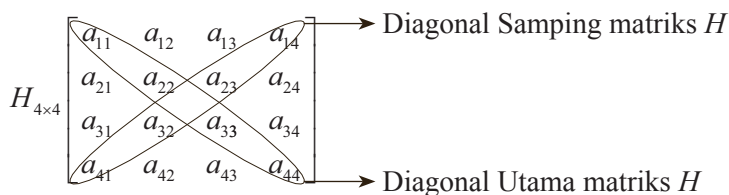
$$T_{2\times3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix},$$ matriks persegipanjang berordo 2 × 3, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh.

$$T_{3\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix},$$ matriks persegipanjang berordo 3 × 2, yang merepresentasikan umur semua anggota keluarga Teguh.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$$T_{2\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix},$$ matriks persegi berordo 2 × 2, yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.

Jika kita meninjau matriks persegi berordo 4 × 4 di bawah ini.

Diagonal utama suatu matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks, yaitu semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

e. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks F berordo 4 × 4. Jika terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

maka matriks persegi yang berpola seperti matriks F dan G disebut matriks segitiga.

Jadi, matriks segitiga merupakan suatu matriks persegi berordo $n \times n$ dengan elemen-elemen matriks di bawah atau di atas diagonal utama semuanya nol.

f. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi, seperti matriks berikut ini.

- $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka matriks persegi dengan pola “semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama tidak semuanya bernilai nol”, disebut matriks diagonal.

g. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

$$I_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika suatu matriks persegi unsur diagonal utamanya adalah 1 dan unsur yang lainnya semua nol disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

h. Matriks Nol

Jika elemen suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka disebut matriks nol.

3. Transpos Matriks

Pak Susilo, pensiunan PLN, memiliki banyak koleksi buku, majalah, dan novel yang pernah dia beli maupun terima selama dia masih aktif sebagai pegawai PLN. Karena begitu banyak koleksi buku tersebut, ditambah lagi ruang koleksinya tidak memadai, Pak Susilo berniat akan menghibahkan semua buku-buku tersebut ke kampung halamannya, yaitu di Tegal. Sebelum akan dibawa pengangkutan, Parman, cucunya, membantu menyusun buku-buku tersebut dalam tumpukan-tumpukan seperti pada Gambar 4.5.

Ruang Baca

Pengangkutan

Buku Komik	Majalah Sport	Majalah Teknik	Buku Motivasi	Buku Matematika	Buku Fisika
Buku Kimia	Novel Petualang	Majalah Furniture	Buku Rohani	Buku Budaya	Bahasa Inggris
Koleksi Kamus	Majalah Intisari	Buku Peta	Buku Sejarah	Buku Autbio-graphy	Majalah Fashion

Gambar 4.5. Diagram susunan koleksi buku-buku

Jika direpresentasikan semua koleksi tersebut dalam matriks, dengan sudut pandang dari ruang baca, akan diperoleh matriks persegi panjang berordo 3 × 6. Kita sebut matriks B,

$$B_{3\times 6}\begin{bmatrix} BKo & MS & MT & BMo & BMa & BF \\ BKi & NP & MF & BR & BB & BI \\ KK & MI & BP & BS & BA & MF \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, karena halaman rumah Pak Susilo yang tidak cukup untuk ruang gerak truk sehingga truk harus diparkir di sebelah Barat ruang baca Pak Susilo. Pihak pengangkutan menyusun semua koleksi tersebut menurut barisan buku yang terdekat ke truk. Matriks B, berubah menjadi:

$$B_{6\times 3}=\begin{bmatrix} BKo & BKi & KK \\ MS & NP & MI \\ MT & MF & BP \\ BMo & BR & BS \\ BMa & BB & BA \\ BF & BI & MF \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kedua matriks $B_{3\times 6}$ dan $B_{6\times 3}$, dalam kajian yang sama, ternyata memiliki relasi. Relasi yang dimaksud dalam hal ini adalah "perubahan posisi elemen matriks", atau disebut transpos matriks, yang diberi simbol B^t sebagai

transpos matriks B. Namun beberapa buku menotasikan transpos matriks $\overline{B}$ dengan atau B'.

Perubahan yang dimaksud dalam hal ini adalah, setiap elemen baris ke-1 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-1 pada matriks B^t, setiap elemen baris ke-2 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-2 pada matriks B^t, demikian seterusnya, hingga semua elemen baris pada matriks matriks B menjadi elemen kolom pada matriks B^t. Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpos matriks suatu matriks.

Contoh 4.2

a. Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks S, adalah

$$S^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 5 & 15 & 9 \\ 7 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

b. Jika $A = [-3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 19]$, maka $A^t = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

c. Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$, maka $C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transpos matriks berordo $n \times m$.

- *Guru menjelaskan kepada siswa bahwa transpos dari matriks identitas adalah matriks itu sendiri.*
- *Untuk menunjukkan $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, guru menjelaskan pembuktian dengan mengambil sembarang matriks $A_{m\times n}$ dan $B_{m\times n}$ sebagai berikut.*

$$(A_{m\times n})^t = (B_{m\times n})^t = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{m3}+b_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & a_{3n}+b_{3n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Sedangkan transpose matriks $A + B$, dituliskan.

$$(A_{m\times n} + B_{m\times n})^t = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{m3}+b_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & a_{3n}+b_{3n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

4. Kemandirian Dua Matriks

Pada suatu kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangun yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.

Gambar 4.6 Denah komplek ruko

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok A sama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok A sama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok A dan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Dari ilustrasi di atas, kita akan mengkaji dalam konteks matriks. Dua matriks dikatakan sama jika memenuhi sifat berikut ini.

Definisi 4.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh 4.3

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi matriks $P^t = Q$, dengan

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian

Karena P merupakan matriks berordo 3×2, maka P^t merupakan matriks berordo 2×3. Sedangkan matriks Q merupakan matriks berordo 2×3. Oleh karena itu berlaku kesamaan matriks $Pt = Q$.

Dengan $P^t = \begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix}$. Akibatnya, kesamaan $P^t = Q$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dari kesamaan di atas, kita temukan nilai a, b, c, dan d sebagai berikut:

- $3b = 3$ maka $b = 1$, dan $2c = 6$ maka $c = 3$.
- $2a - 4 = -4$ maka $a = 0$.
- Karena $a = 0$ maka $d = -3$.

Jadi, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, dan $d = -3$.

Uji Kompetensi 4.1

1. Diketahui matriks $M = [2\ \ 6\ \ 12\ \ 7\ \ 11]$ dan $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks M dan N, tentukanlah :
   a. Elemen baris ke-1 kolom ke-3 pada matriks M!
   b. Elemen kolom ke-1 baris ke-5 pada matriks N!
   c. Hasil perkalian elemen baris ke-2 pada matriks N dengan elemen kolom ke-4 pada matriks M!
   d. Selisih elemen baris ke-6 pada matriks N terhadap elemen kolom ke-2 pada matriks M!
   e. Elemen baris ke-7 pada matriks N. Silahkan jelaskan!
2. Menurut kamu, apakah ada batasan banyak baris dan kolom untuk membentuk suatu matriks? Jelaskan!
3. Coba berikan contoh yang lain (selain yang disajikan di atas) mengenai matriks yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari!
4. Menurut kamu, teknologi apakah yang menggunakan konsep matriks yang sedang kita pelajari ini? Tolong deskripsikan!
5. Buatlah matriks yang terdiri dari 5 baris dan 3 kolom, dengan semua elemennya adalah 15 bilangan prima yang pertama. Serta tentukan transpos matriksnya!
6. Jika elemen suatu matriks merupakan anggota bilangan kuadrat, buatlah matriks yang terdiri dari 7 baris dan 2 kolom! Serta tentukan transpos matriksnya!
7. Tentukanlah matriks berordo 5 × 5, dengan aturan:
   $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad i - j > 1 \\ -1 & \text{jika} \quad i - j \le 1 \end{cases}$!
8. Menurut ilmu kedokteran, dikatakan bahwa terdapat relasi antara berat badan dengan tinggi badan seseorang. Bisakah kamu merepresentasikan persoalan tersebut ke dalam matriks? (Silahkan gunakan data berat badan dan tinggi badan teman sekelasmu)!
9. Jelaskan nilai kebenaran untuk setiap pernyataan berikut ini!
   a. Dua matriks yang berordo sama merupakan syarat perlu bagi dua matriks yang sama.
   b. Dua matriks yang sama merupakan syarat cukup bagi dua matriks yang sama.

   Petunjuk: Jika kamu belum paham arti syarat cukup dan syarat perlu, silahkan tanyakan pada gurumu!

10. Masalah Penugasan Pengasuh Bayi. Sebuah biro jasa penyedia pengasuh bayi mempunyai empat klien dan lima pengasuh. Biro tersebut mengevaluasi tingkat kecocokan antara klien dan pengasuh bayi dalam sebuah tabel dengan skala nol sampai sepuluh; nilai nol artinya klien tidak cocok dengan pengasuh bayi dan nilai sepuluh untuk klien yang sangat cocok dengan pengasuh. Tabel peringkat tersebut sebagai berikut!

		Nama Pengasuh Bayi				
		Tarsi	Inem	Wati	Nurlela	Marni
KLIEN	Ibu Ratna	7	4	7	3	10
	Ibu Santi	5	9	3	8	7
	Ibu Bonita	3	5	6	2	9
	Ibu Soimah	6	5	0	4	8

Bagaimanakah biro jasa tersebut menugaskan pengasuh-pengasuhnya agar dapat memaksimumkan jumlah angka kecocokan antara klien dengan pengasuh?

11. Untuk matriks-matriks berikut, tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t,$$

$$D=\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

12. Diketahui matriks-matriks

$$T=\begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$R=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Tentukan transpos dari matriks T!

b) Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai a, b, c, d, e, dan f!

13. Diketahui matriks $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

dan matriks $X=\begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks A sama dengan matriks X?. Jelaskan!

14. Pada tahun ajaran baru, Anas mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buah buku Matematika dan 4 buah buku Biologi. Dia harus membayar sebesar Rp 410.000. Pada saat yang bersamaan, Samad mewakili teman-teman yang lainnya membeli 10 buah buku Matematika dan 6 buah buku Biologi. Samad harus membayar Rp 740.000 untuk semuanya.

Nyatakanlah persoalan tersebut dalam bentuk matriks dan selesaikanlah!

Projek

Temukan contoh penerapan matriks dalam ilmu komputer, bidang ilmu fisika, kimia, dan teknologi informasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku matematika, fisika, biologi, kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku matematika, tersedia buku aljabar, geometri, statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom sebuah matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk mendapatkannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah

a. Operasi Hitung pada Matriks

1) *Penjumlahan Dua Matriks*

Untuk memudahkan kita memahami penjumlahan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah-4.6

Sebuah perusahaan garmen memiliki dua pabrik yang berlokasi di Jakarta dan Surabaya. Perusahaan itu memproduksi dua jenis produk, yaitu baju dan jas. Biaya untuk bahan ditangani oleh sebuah departemen dan upah buruh ditangani oleh pabrik departemen lainnya. Biaya untuk setiap jenis produk diberikan pada matriks berikut.

Pabrik di Surabaya (dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	200	600
Buruh	20	80

Pabrik di Jakarta (dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	125	450
Buruh	25	90

Jika kita misalkan matriks biaya di Surabaya, sebagai matriks S dan biaya matriks di Jakarta sebagai matriks *J*, maka biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk kedua pabrik tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

- Total biaya bahan untuk baju = 200 + 125 = 325
- Total biaya bahan untuk jas = 600 + 450 = 1050
- Total biaya buruh untuk baju = 20 + 25 = 45
- Total biaya buruh untuk jas = 80 + 90 = 170

Jika keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks, adalah sebagai berikut:

Total Biaya Pabrik
(dalam Jutaan)

	Baju	Jas
Bahan	325	1050
Buruh	45	170

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan diakibatkan kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 4.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B, ditulis $C = A + B$, matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks adalah sama dengan memiliki ordo yang sama dengan matriks yang dijumlahkan.

Contoh 4.4

a) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka hasil jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, maka mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$!

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3×3, karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3×3 juga.

- $$T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$
- $$O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks tidak nol yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas, I.

2) *Pengurangan Dua Matriks*

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks $-B$, ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Matriks $-B$ dalam merupakan matriks yang elemennya berlawanan dengan setiap elemen yang bersesuaian matriks B.

Contoh 4.5

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a) Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks-matriks X, Y, dan Z sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini:

i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$.

Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2. Sedangkan matriks Z berordo 3×2. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (kenapa)?

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari pemahaman contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$.

- *Guru mengarahkan siswa untuk menunjukkan bahwa sifat komutatif berlaku untuk penjumlahan matriks, tetapi tidak berlaku untuk pengurangan dua matriks.*

3) *Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks*

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan emua elemen matriks B. Artinya,

matriks ($-B$) dapat kita tulis sebagai:

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 4.4

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A, dinotasikan: $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j\text{).}$$

Contoh 4.6

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2.H = \begin{bmatrix} 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times4 & 2\times5 \\ 2\times1 & 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka $\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times12 & \frac{1}{3}\times30 & \frac{1}{3}\times15 \\ \frac{1}{3}\times0 & \frac{1}{3}\times24 & \frac{1}{3}\times18 \\ \frac{1}{3}\times3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

□) Jika $M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{4}□ \; □\frac{3}{4}□ = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times12 & \frac{1}{4}\times24 & \frac{1}{4}\times36 \\ \frac{1}{4}\times48 & \frac{1}{4}\times60 & \frac{1}{4}\times□2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times12 & \frac{3}{4}\times24 & \frac{3}{4}\times36 \\ \frac{3}{4}\times48 & \frac{3}{4}\times60 & \frac{3}{4}\times□2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6 & \square\\ 12 & 15 & 18\end{bmatrix}\square\begin{bmatrix}\square & 18 & 2\square\\ 36 & 45 & 54\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 24 & 36\\ 48 & 60 & \square 2\end{bmatrix}=\square\ .$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok masalah berikut.
M suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij}, p dan q adalah bilangan real. Jika $C = (p + q) \times M$, maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = (p + q)a_{ij}$ untuk setiap i dan j. Sehingga $(p + q)\ M = p \times M + q$ x M.

- Dengan mengambil sembarang matriks $M_{m\times n}$, dan untuk p, q merupakan anggota Himpunan Bilangan Real.

Misal, $M_{m\times n}=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ m_{m1} & m_{m2} & m_{m3} & \cdots & m_{mn}\end{bmatrix}$, maka

$$p.M_{m\times n}+q.M_{m\times n}=$$

$$\begin{bmatrix}p.m_{11} & p.m_{12} & p.m_{13} & \cdots & p.m_{1n}\\ p.m_{21} & p.m_{22} & p.m_{23} & \cdots & p.m_{2n}\\ p.m_{31} & p.m_{32} & p.m_{33} & \cdots & p.m_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p.m_{m1} & p.m_{m2} & p.m_{m3} & \cdots & p.m_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q.m_{11} & q.m_{12} & q.m_{13} & \cdots & q.m_{1n}\\ q.m_{21} & q.m_{22} & q.m_{23} & \cdots & q.m_{2n}\\ q.m_{31} & q.m_{32} & q.m_{33} & \cdots & q.m_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ q.m_{m1} & q.m_{m2} & q.m_{m3} & \cdots & q.m_{mn}\end{bmatrix}$$

$$p.M_{m\times n}+q.M_{m\times n}=\begin{bmatrix}(p+q).m_{11} & (p+q).m_{12} & (p+q).m_{13} & \cdots & (p+q).m_{1n}\\ (p+q).m_{21} & (p+q).m_{22} & (p+q).m_{23} & \cdots & (p+q).m_{2n}\\ (p+q).m_{31} & (p+q).m_{32} & (p+q).m_{33} & \cdots & (p+q).m_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (p+q).m_{m1} & (p+q).m_{m2} & (p+q).m_{m3} & \cdots & (p+q).m_{mn}\end{bmatrix}$$

$$= (p+q)\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & m_{m3} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= (p+q)M_{m\times n}.$$

Jadi, terbukti bahwa $p.M_{m\times n} + q.M_{m\times n} = (p + q)M_{m\times n}$.

d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $c = -1$, maka

$$c.(P - Q) = -1.\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right) = -1.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok bahwa jika matrik P dan Q merupakan dua matriks berordo sama, dan c adalah bilangan real, maka $c \times (P - Q) = c \times P - c \times Q$. Tentunya hasil $c \times (P - Q)$ sama dengan $c \times P - c \times Q$. Untuk matriks P dan Q berordo $m \times n$, dan c suatu skalar, c bilangan real. Silahkan diskusikan bahwa $c \times (P + Q) = c \times P + c \times Q$.

3) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ dan $p = 2$ dan $q = \frac{1}{2}$.

Kita dapat memahami bahwa:

$$q \times L = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan hasil p dengan q, maka kita akan peroleh:

$$p \times (q \times L) = 2 \times \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L, merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p \times (q \times L)$.

Sekarang, untuk matriks M berordo $m \times n$, p dan q adalah skalar anggota Himpunan bilangan real, tunjukkan bahwa: $p \times (q \times L) = (p \times q).L$.

4) *Perkalian Dua Matriks*

Masalah-4.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu handphone, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga Handphone (jutaan)	2
Harga Komputer (jutaan)	5
Harga Sepeda Motor (jutaan)	15

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

- *Guru menyuruh siswa untuk menyelesaikan persoalan di atas tanpa menggunakan konsep matriks.*

Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan, matriks $C_{3\times3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan jumlah unit setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3\times1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

- Cabang 1
  Total biaya = (7 unit handphone × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor ×15 juta).
  = Rp99.000.000,00
- Cabang 2
  Total biaya = (5 unit handphone × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp70.000.000,00
- Cabang 3
  Total biaya = (4 unit handphone × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit komputer × 5 juta)
  = Rp43.000.000,00

Jadi, total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut:

$$R_{3\times1} = \begin{bmatrix} 99.000.000 \\ 70.000.000 \\ 43.000.000 \end{bmatrix}.$$

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks D. Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks D, maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{n\times m}$ dan matriks $B_{p\times n}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom B. Hasil perkalian matriks A berordo $n \times m$ terhadap matriks B berordo $p \times n$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ terhadap matriks $B_{n\times p}$, dinotasikan $C = A \times B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 4.7

a) Diketahui matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

- *Guru mengarahkan siswa menemukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A. Selanjutnya, bersama siswa memeriksa apakah hasil perkalian matriks A dan matriks B sama dengan hasil perkalian matriks B dan matriks A. Sehingga ditemukan kesimpulan bahwa tidak berlaku sifat komutatif pada perkalian matriks.*

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0 \\ 3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0 \\ 5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a), silahkan periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

Contoh 4.8

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukanlah A^{2013}!

Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 \times I = -I$$

Jika $A_2 = -I$, maka $A^4 = I$. Artinya, untuk setiap pangkat matriks A kelipatan 2, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

2013 = 4.(503) + 1.

Akibatnya,

$A^{2013} = A^{(4.(503)+1)} = (A^4)^{503}.A^1$.

Matriks $A^4 = I$, dan $I^n = I$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, akibatnya berlaku, $(A^4)^{503} = I$.

Oleh karena itu,

$$A^{2013} = I \times A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Pola pengerjaan di atas hanya berlaku untuk kondisi jika pangkat suatu matriks persegi memiliki hubungan dengan matriks identitas. Jadi guru harus mampu memotivasi siswa untuk giat latihan dengan soal-soal lanjutan.*

Uji Kompetensi 4.2

1. Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo 4×5 dan misalkan, C, D, dan E berturut-turut adalah matriks-matriks berordo 5×2, 4×2, dan 5×4. Tentukanlah yang mana antara pernyataan matriks di bawah ini yang terdefinisi. Jika ada tentukanlah ukuran matriks tersebut!

   (a) BA (d) $AB + B$
   (b) $AC + D$ (e) $E(A + B)$
   (c) $AE + B$ (f) $E(AC)$

2. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

   a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

   b) $6. \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. Apa yang dapat kamu jelaskan dengan operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks $A.X = B$, dengan matriks A dan B matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks X? Tolong paparkan di depan kelas!

4. Berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menerapkan konsep perkalian matriks! (Selain konteks persoalan yang sudah disajikan pada buku ini).

5. Diketahui matriks-matriks

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t$

dan $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$.

Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

6. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$,

   dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan A+X=B. Tentukan matriks X!

7. Berikan beberapa matriks A dan B yang memenuhi kesamaan $(A + B)^t = A^t + B^t$!

8. Tunjukkan bahwa $A^r.A^s = A^{(r+s)}$, untuk semua matriks A matriks persegi!

9. Tentukanlah nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini! Untuk setiap matriks A dan B adalah matriks persegi.
   a) Jika elemen pada kolom ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen kolom ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
   b) Jika elemen pada baris ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen baris ke-1 matriks AB juga semuanya nol.

10. Tentukanlah nilai-nilai p, q, r, dan s pada persamaan matriks berikut!

$$5\begin{bmatrix} r & a \\ p & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}.$$

11. Diketahui matriks-matriks:

    $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, dan

    $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

    Jika $F(X, Y, Z)$ didefinisikan sebagai $F(X, Y, Z) = 4X - 2Y + Z$.
    Tentukanlah
    $F(A, B, C)$!
    $F(2A, 3B, 2C)$!

12. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$,

    dan lima matriks yang dapat dipilih untuk dikalikan dengan matriks G, yaitu:

    $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

    $J = G^t$, $K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    Matriks yang manakah dapat dikalikan terhadap matriks G? Kemudian tentukan hasilnya!

13. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
    i. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
    ii. $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

14. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka

    tentukanlah $C^3 - 4C^2 + C - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3.

15. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!

   a) $G = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $G^2 = I$

   b) $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $F^2 = xF + y.I$

   I adalah matriks identitas berordo 2×2.

Projek

Himpunlah minimal lima masalah di bidang ekonomi, transportasi, dan teknik yang melibatkan konsep dan operasi dua buah matriks atau lebih. Ujilah apakah berlaku berbagai sifat operasi matriks di dalam pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan paparkan di depan kelas.

6. Determinan dan Invers Matriks

Masalah-4.8

Pekan Raya Jakarta, biasanya diselenggarakan sekitar Juli setiap tahunnya. Acara ini menampilkan berbagai hal menarik tentang ibukota negara Indonesia, seperti pameran teknologi terbaru, kebudayaan Betawi, hasil industri kreatif, dan banyak hal lain yang perlu disaksikan.

Tahun 2012, keluarga Pak Tatang akan menghadari kegiatan tersebut dengan membeli 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak seharga Rp 210.000,00. Dengan niat yang sama, keluarga Pak Asep membeli 2 tiket dewasa dan 3 tiket anak-anak seharga Rp 190.000,00.

Berapakah total uang tiket yang akan dibayar oleh Pak Asep, jika dia harus menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak-anak?

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Untuk menyederhanakan masalah di atas, kita misalkan
x : harga tiket dewasa
y : harga tiket anak-anak.
Oleh karena itu, persoalan di atas dinyatakan dalam persamaan linear dua peubah seperti berikut.

Banyak tiket yang dibeli Pak Tatang : $3x + 2y = 210.000$
Banyak tiket yang dibeli Pak Asep : $2x + 3y = 190.000$
Matriks yang merepresentasikan kedua persamaan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \text{ .... (1)}$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linier,

Diskusi

Menurut kamu, apakah semua sistem persamaan linear dua variabel memiliki penyelesaian? Silahkan diskusikan dengan temanmu.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2 \times c_1 - b_1 \times c_2}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1 \times c_2 - a_2 \times c_1}{a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1},\ a_1b_2 \neq a_2b_1 \text{ .... (2)}$$

- *Guru harus mampu mengarahkan siswa untuk mengingat kembali cara menentukan himpunan penyelesaian SPLDV, melalui soal latihan. Serta guru harus memastikan bahwa siswa mampu menunjukkan solusi sistem tersebut dengan salah cara menentukan himpunan penyelesaian SPLDV.*
- *Untuk memastikan apakah siswa telah paham bahwa SPLDV memiliki 3 kemungkinan himpunan penyelesaian, yaitu*
  – *Memiliki solusi tunggal*
  – *Memiliki tak hingga banyaknya solusi*
  – *Tidak memiliki solusi*

Dalam konsep matriks, nilai $(a_1.b_2 - a_2.b_1)$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ atau det.$(A) = |A|$, dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A.$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ....(3)}$$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 210.000 & 2 \\ 190.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{630.000 - 380.000}{9-4} = \frac{250.000}{5} = 50.000.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 210.000 \\ 3 & 190.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{570.000 - 420.000}{9-4} = \frac{150.000}{5} = 30.000.$$

Jadi, harga tiket Pekan Raya Jakarta untuk orang dewasa adalah Rp 50.000,00 dan untuk anak-anak adalah Rp 30.0000,00.
Karena Pak Asep ingin menambah 3 tiket dewasa dan 2 tiket anak, maka dia harus menambah uang tiket sebesar Rp 210.000,00. Total biaya tiket yang harus dibayar Pak Asep adalah Rp 400.0000,00.

Cara II
Dengan menggunakan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

Kita misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$, akibatnya persamaan tersebut menjadi :
$A.X = B$. ………………………………………………………….. (4)
Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada persamaan (4)?
Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada persamaan (4)?

Definisi 4.5

Misalkan A matriks berordo $n \times n$. Matriks A^{-1} adalah invers matriks A jika dan hanya jika $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$.

Misalkan A matriks persegi, berordo 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Maka invers matriks A, dinotasikan A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{(a \times d - b \times c)} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \times d \neq b \times c.$$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ disebut adjoin matriks A, dinotasikan *Adjoin* A.

Salah satu sifat invers matrik adalah $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$.

Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1}.A.X = A^{-1}B$. (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1}.A).X = A^{-1}B$

$I.X = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ (karena $I.X = X$)... (5)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat det.$A \neq 0$, namun ada beberapa teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.

Kembali ke persamaan matriks,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B.$$

Karena A adalah matriks tak singular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah kita lanjutkan menentukan matriks X.

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 210.000 \\ 190.000 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} 250.000 \\ 150.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 50.000 \text{ dan } y = 30.000.$

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara I. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

Masalah-4.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara *A*, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat, yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara *A*, seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat dari yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x: banyaknya pesawat Airbus 100
y: banyaknya pesawat Airbus 200
z: banyaknya pesawat Airbus 300
Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\left.\begin{array}{l} 50x + 75y + 40z = 305 \\ 30x + 45y + 25z = 185 \\ 32x + 50y + 30z = 206 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}.$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular.
Ada beberapa cara untuk menentukan *det.A*, antara lain Metode Sarrus. Yaitu sebagai berikut:

Misalnya matriks $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka deteminan A adalah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} - a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$.

Untuk matriks pada masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

$= (50.45.30) + (75.25.32) + (40.30.50) – (32.45.40) – (50.25.50) – (30.30.75)$

$= –100.$

Analog dengan persamaan (3), kita dapat menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\begin{bmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2.$$

Oleh karena itu, banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan: 3 unit
banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan: 1 unit
banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan: 2 unit.

- *Guru memandu siswa mengerjakan cara II untuk menyelesaikan masalah Pembelian Tiket PRJ. Dengan menggunakan konsep determinan, maka nilai*

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 210.000 & 2 \\ 190.000 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{3.(210.000) - 2.(190.000)}{3.3 - 2.2} = \frac{250.000}{5} = 50.000$$

dan

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 210.000 \\ 2 & 190.000 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{3.(190.000) - 2.(210.000)}{3.3 - 2.2} = \frac{150.000}{5} = 30.000$$

Tentunya, hasil di atas sama dengan hasil yang dikerjakan pada dua cara yang telah disajikan di atas.

Contoh 4.9

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa det($A.B$) = det(A).det(B).

Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan A, B, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks $A.B$, yaitu:

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Jika matriks $A.B$ tersebut kita peroleh $\det(A.B) = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28.$

Sekarang akan kita bandingkan dengan nilai $|A|.|B|$.

Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka det(A) = 14, dan jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ maka det(B) = –2.

Nilai det(A).det(B) = 14.(–2) = –28.
Sedangkan bahwa det($A.B$) = det(A).det(B) = –28.

- *Guru memandu siswa untuk menyelesaikan Latihan 4.1, yaitu apakah |A.B.C|=|A|.|B|.|C|, melalui pembuktian induksi matematik, untuk setiap matriks ,B, dan C berordo n × n.*
- *Untuk menelusuri determinan k.A, guru dapat menunjukkan melalui contoh-contoh, sehingga siswa dapat memahami pola yang terbentuk. Selanjutnya, guru memberikan kesempatan siswa untuk menyelidiki apakah det(k.A) = k.det(A). Pastikan hasil pekerjaan siswa, jika siswa mengalami kesulitan berikan arahan dan petunjuk untuk menjawab soal tersebut.*

Latihan 4.1

1) Selidiki apakah $|A.B.C| = |A|.|B|.|C|$ untuk setiap matriks-matriks A, B, dan C berordo $n \times n$.
2) Jika matriks A adalah matriks persegi berordo 2×2, dan k adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks $k.A$.

Contoh 4.10

Sebuah matriks P berordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a, b, c, d \in R$.

Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$. Tentukanlah determinan dari matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Penyelesaian

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinan matriks P adalah α, maka berlaku $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = $ad - bc = \alpha$.

Elemen matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P, yaitu:
q_{21} = hasil kali skalar × terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{21}.

q_{22} = hasil kali skalar × terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{22}.
Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{baris 1} \\ \rightarrow \text{baris 2} \end{matrix}$$

Elemen baris 1 matriks Q = elemen baris 1 matriks P. Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks Q menjadi elemen baris 2 matriks P.
q_{21} dapat dioperasikan menjadi:
$(q_{21})^* = s.q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa + sa & xd - sb + sb \end{vmatrix}$$

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{baris } 1^* \\ \rightarrow \text{baris } 2^* \end{matrix}.$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru Matematika), maka $|Q| = x.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha, \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \right)$.

Jadi $|Q| = x\alpha$.

- *Guru menunjukkan kepada siswa, pola terdapat pada soal di atas dan untuk kondisi matriks $P_{3\times3}$ adalah berlaku secara umum untuk sembarang matriks berordo $n \times n$ dengan pola elemen matriks seperti yang disajikan pada Contoh 4.10.*

Ambil sembarang matriks $P_{3\times3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, dengan matriks.

$$Q_{3\times3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ xd - a.s & xe - b.s & xf - c.s \\ xg - a.s & xh - b.s & xi - c.s \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan operasi baris elementer, akan diperoleh matriks Q yang baru, yaitu

$$Q_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ xd & xe & xf \\ xg & xh & xi \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, |Q| = $x.\alpha$.

Untuk semua matriks persegi dan elemen matriks mengikuti pola di atas, maka determinan matriks tersebut selalu $x.\alpha$.

Guru memandu siswa untuk menyelesaikan Latihan 4.2, yaitu Misal matriks P madalah matriks berordo 3 × 3, dengan |P| = α dan matriks Q berordo 3 × 3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas. Tentukan determinan matriks Q!

Latihan 4.2

Misalkan P matriks berordo 3 × 3, dengan $|P| = \alpha$ dan matriks Q berordo 3 × 3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas. Tentukan determinan matriks Q!

Uji Kompetensi 4.3

1. Selidiki bahwa $\det(A^n) = (\det A)^n$, untuk setiap:

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 3$

2. Diketahui $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8$,

   tentukanlah:

   a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$!

   b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$!

3. Tentukanlah z yang memenuhi persamaan berikut!

   $$\begin{vmatrix} z & 5 & 7 \\ 0 & z+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Selidiki bahwa $\det(C+D) = \det C + \det D$! Untuk setiap matrik C dan D merupakan matriks persegi.

5. Jika matriks M adalah matriks berordo 2×2, $|M| \neq 0$. Tentukan hubungan $|M|$ dengan $\det M^{-1}$. Coba kamu generalisasikan untuk matriks M berordo $n \times n$!

6. Tentukanlah nilai z, yang memenuhi persamaan berikut ini!

   $$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}.$$

7. Jika elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!

8. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!

   a) $\det(2A) = 2.\det(A)$

   b) $|A^2| = |A|^2$

   c) $\det(I + A) = 1 + \det(A)$

   Untuk matriks A merupakan matriks persegi.

9. Untuk matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$, dengan $PQ \neq QP$. Apakah $\det(PQ) = \det(QP)$? Jelaskan!

10. Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan elemen kolom ke-1 semuanya nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!

11, Masalah Nutrisi

   Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira. Setelah berkonsultasi dengan

seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makanan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks G, dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks J.

$$G = \begin{array}{c} \textit{Sumber I} \quad \textit{Sumber II} \\ \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Kalsium} \\ \text{Protein} \\ \text{Karbohidrat} \end{array}$$

$$J = \begin{array}{c} \textit{Biskuit A} \quad \textit{Biskuit B} \quad \textit{Biskuit C} \\ \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Sumber I} \\ \text{Sumber II} \end{array}$$

a. Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B!

b. Hitunglah $G.J$ dan jelaskan arti dari setiap elemen matriks tersebut!

12. Masalah alokasi sumber daya.
    Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp 400.000,00 per malam, tranprotasi ke tiap tempat wisata Rp 80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 90.000,00.
    a) Nyatakan matriks harga sewa hotel, tranportasi dan makan.
    b) Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.
    c) Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
    d) Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

13. Masalah Persediaan Toko Cat.
    Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persedian tiga jenis cat eksterior, yaitu *regular*, *deluxe*, dan *commercial*. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$R = \begin{array}{c} \textit{Biru Hitam Kuning Coklat} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

$$S = \begin{array}{c} \textit{Biru Hitam Kuning Coklat} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{array}$$

a. Tentukan inventaris toko pada akhir minggu.

b. Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks *T*. Tentukan inventaris toko yang baru.

14. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa $(B^{-1})^{-1} = B$ dan $[B^t]^{-1} = [B^{-1}]^t$!

15. Tentukanlah determinan dari matriks

$$M = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$

16. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel.

$$x + y = 3$$
$$2x - y = 0$$

Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Projek

Himpun minimal tiga permasalahan dalam bidang ekonomi, transportasi, dan matematika terkait penerapan konsep determinan dan *invers* matriks. Selidiki sifat *invers* matriks yang diterapkan pada pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah telah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pengangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks A ditransposkan menghasilkan matriks A^t dengan elemen baris matriks A berubah menjadi elemen kolom matriks A^t. Dengan demikian matriks A^t ditrasposkan kembali, hasinya menjadi matriks A atau $(A^t)^t = A$.
3. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
4. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, misal jika A dan B adalah matriks, maka
   a. $A + B = B + A$
   b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
5. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen dari matriks semula.
6. Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom dari matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris dari matriks pengalinya.
7. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas perkalian, hasilnya adalah matriks A.
8. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks dengan skalar memenuhi sifat komutatif dan assosiatif. Misal jika k adalah skalar, A, dan B adalah matriks maka berlaku.
   a. $k\,A = A\,k$
   b. $k(A \pm B) = kA \pm kB$
9. Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B. Misal jika $A_{p \times q}$ dan $B_{q \times r}$ adalah dua buah matriks, maka berlaku $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$.
10. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

Selanjutnya kita akan bahas tentang relasi dan fungsi. Untuk mempelajari relasi dan fungsi, anda harus mempelajari ulang tentang konsep dan sifat-sifat himpunan, sebab semua relasi dan fungsi didefinisikan pada domainnya yang berupa himpunan. Demikian juga daerah kawan dan daerah hasil suatu relasi dan fungsi adalah suatu himpunan.

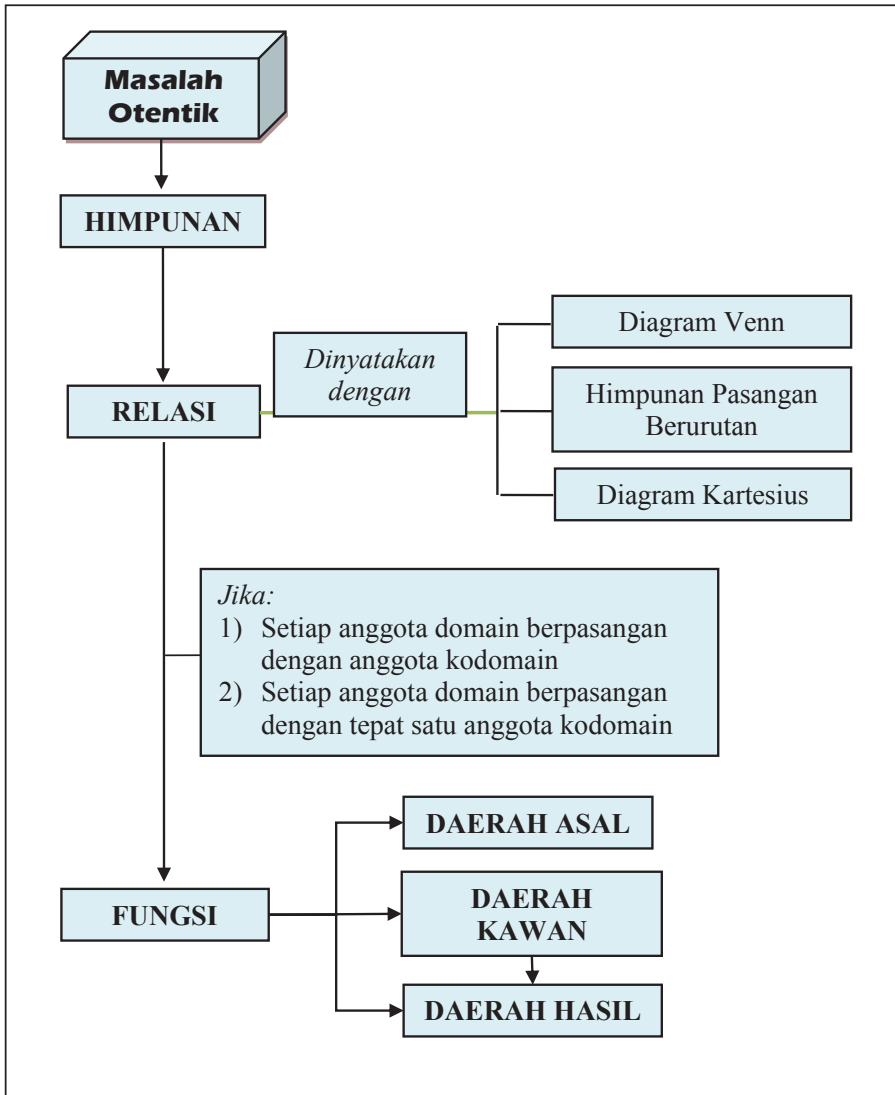
Relasi dan Fungsi

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

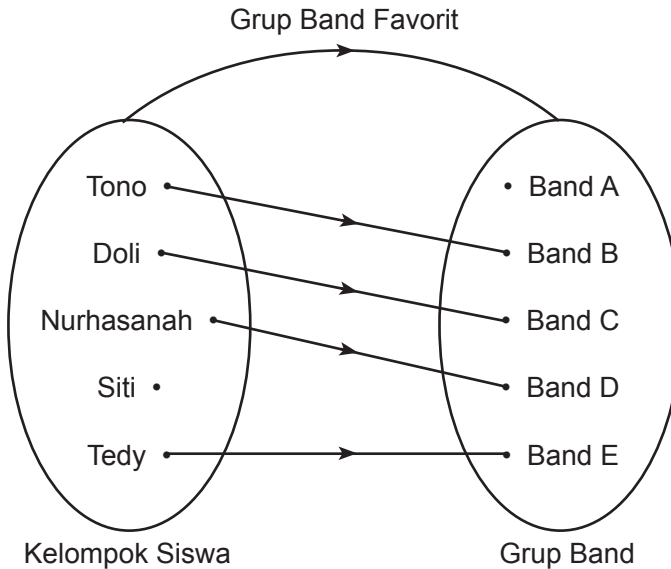
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memahami daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik); 3. mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi.	Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola instalasi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi; • menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn; • menuliskan sifat-sifat relasi; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi; • menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram venn; • menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

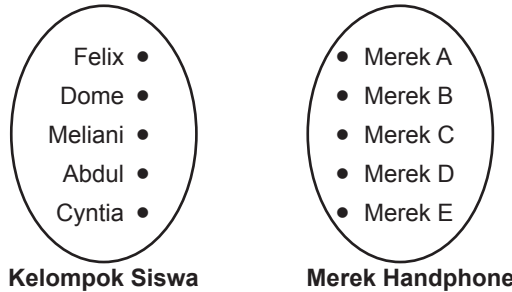
1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah merupakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.

Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terperinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

(1) Grup band favorit Tono adalah Band B.
(2) Grup band favorit Doli adalah Band C.
(3) Nurhasanah band favorit Tono adalah Band D.
(4) Grup band favorit Tedy adalah Band E.
(5) Siti tidak memiliki grup band favorit dari kelompok grup band yang diberikan.
(6) Tidak ada siswa yang grup band favoritnya Band A.

- *Guru mengarahkan siswa agar mampu menduga fakta-fakta yang kita temukan di atas?*

Bandingkan dengan gambar berikut.

Gambar 5.2 Kelompok siswa dan merek handpone

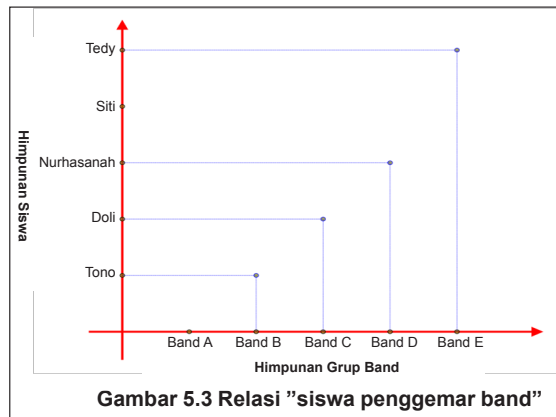
Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah: 'Grup band favorit'. Pada Gambar 5.2 tidak dapat ditemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis berpanah yang menghubungkan yang diberikan.

Aturan menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah 'grup band favorit'. Relasi yang ada pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis berpanah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut dengan relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah, relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa direlasikan dengan grup band favoritnya adalah: {(Tono, Band B), (Doli, Band C), (Nurhasanah, Band D), (Tedy, Band E)}

Jika dinyatakan dengan diagram kartesius, ditunjukkan sebagai berikut.

Gambar 5.3 Relasi "siswa penggemar band"

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.

Masalah-5.1

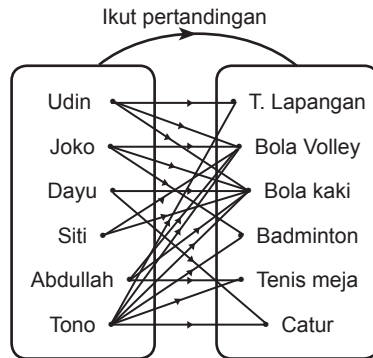
Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 67 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar SMA untuk pertandingan sepak bola, bola volley, bulu tangkis, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 orang siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Abdullah, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Pasangkanlah siswa dengan pertandingan yang akan diikuti dengan ketentuan berikut.

1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola volley, Joko ikut pertandingan badminton, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
2) Siti ikut pertandingan bola volley, Dayu ikut pertandingan catur, Joko ikut pertandingan badminton, Abdullah dan Tono ikut pertandingan bola volley.
3) Udin dan Dayu ikut pertandingan bola kaki, Joko ikut pertandingan badminton, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
4) Siti ikut pertandingan bola volley, Joko, Udin, dan Tono ikut pertandingan bola kaki, Tono ikut pertandingan catur.
5) Keenam siswa ikut pertandingan bola kaki.
6) Tono akan mengikuti seluruh pertandingan.

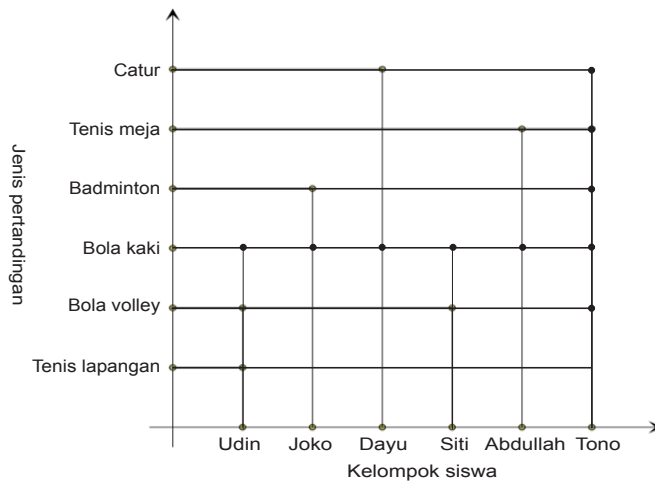
Alternatif Penyelesaian

- *Arahkan siswa untuk memasangkan pertandingan yang akan diikuti secara hati-hati. Perlu dimulai guru, untuk memasangkan hubungan dimaksud dapat dinyatakan dengan 3 cara yaitu: 1) diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram kartesius karena hal tersebut telah dipelajari sewaktu duduk di bangku SMP.*

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

1) Udin ikut pertandingan bola kaki dan bola volley, Joko ikut pertandingan bulu tangkis, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola volley, Abdullah ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
   a) Dengan diagram panah
   b) Dengan himpunan pasangan berurutan

Gambar 5.4 Pasangan setiap siswa yang mengikuti pertan-dingan olah-raga

Himpunan pasangan berurutan: {(Udin, bola kaki), (Udin, bola volley), (Joko, badminton), (Dayu, catur), (Siti, bola volley), (Abdullah, tenis meja), (Tono, tenis meja)}

c) Dengan diagram kartesius

Gambar 5.5 Deskripsi pasangan antara siswa dengan jenis pertandingan

2) Sebagai latihanmu, dengan cara yang sama dengan butir (1) silahkan kerjakan butir (2) sampai butir (6).

Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.

Definisi 5.1

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan. Relasi dari *A* ke *B* adalah aturan pengaitan/ pemasangan anggota-anggota *A* dengan anggota-anggota *B.*

Catatan:

1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua buah atau lebih himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan, dan himpunan kedua yaitu himpunan olah raga yang akan dipertandingkan.
2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada kegiatan-1 yaitu himpunan siswa disebut dengan daerah asal. Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut dengan daerah kawan. Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut dengan daerah hasil.

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data:

- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah “Makanan kesukaan”.
- Jaya dan Budogol makanan kesukaannya adalah nasing goreng.
- Hany makanan kesukaannya adalah bakso.
- Nia makanan kesukaannya adalah mi goreng.
- Dany makanan kesukaannya adalah martabak.
- Tidak ada siswa yang makanan kesukaannya adalah pizza.

Berdasarkan Gambar 5.6 himpunan siswa disebut dengan daerah asal, himpunan makanan disebut dengan daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut dengan daerah hasil. Himpunan daerah asal adalah: {Jaya, Hany, Budogol, Nia, Dany}. Himpunan daerah kawan adalah: {bakso, mi goreng, pizza, nasi goreng, martabak}. Himpunan daerah hasil adalah: {bakso, mi goreng, nasi goreng, martabak}.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain)*, dan daerah hasil (*range*), sebagai berikut.

Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut dengan domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut dengan kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.

Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut dengan *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Pertanyaan Kritis

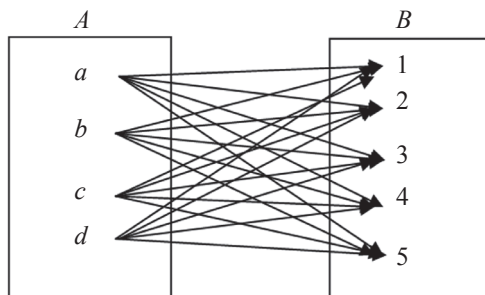
Apakah ada kemungkinan bahwa anggota daerah kawan sama dengan anggota daerah hasil? Berikan alasanmu!

- Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.

Contoh 5.1

Diberikan himpunan $A = \{a,b,c,d\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$. Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B.

Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B dapat ditunjukkan pada diagram berikut.

Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan A dan himpunan B sebanyak $4 \times 5 = 40$ buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(b,5),\ldots,(d,5)\}$.

Secara umum himpunan pasangan berurutan dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 5.5

Misalkan A dan B dua buah himpunan. Relasi pasangan berurutan dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A ke setiap anggota himpunan B. Dapat ditulis

$A \times B = \{(x,y) \mid \forall\ x \in A$ dan $y \in B\}$.

2. Beberapa Sifat Relasi

Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat refleksif jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $(p, p) \in R$.

Contoh 5.2

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.3

Diberikan himpunan $Q = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan Q dengan $R = \{(a,b) \mid a$ kelipatan dari b, dengan $a,b \in Q\}$, sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan Q berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.4

Diberikan himpunan $C = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \mid a + b < 9$,dengan $a,b \in C\}$, maka diperoleh $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat refleksif sebab ada anggota himpunan C, yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau (5, 5) bukan anggota R.

Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Contoh 5.5

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan $R = \{(1,1) , (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat simetris sebab untuk setiap $(x,y) \in R$, berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 5.6

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x$ kelipatan y, $x, y \in A\}$, maka diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena (4,2) anggota R tetapi (2,4) bukan anggota R.

Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R bersifat transitif, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.7

Diberikan himpuan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat transitif sebab $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.8

Diberikan himpunan $C = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \in R$.

Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.9

Diberikan himpunan $C = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{ (a,b) \in a$ kelipatan b, $a,b \in C\}$ sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 5.10

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan S dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat antisimetris sebab terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$, tetapi $1 \neq 2$.

Sifat-5: Sifat Ekuivalensi

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R disebut relasi ekivalensi jika dan hanya jika relasi R memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh 5.11

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat refleksif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekivalensi.

- Coba kamu bekerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa R memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

3. Menemukan Konsep Fungsi

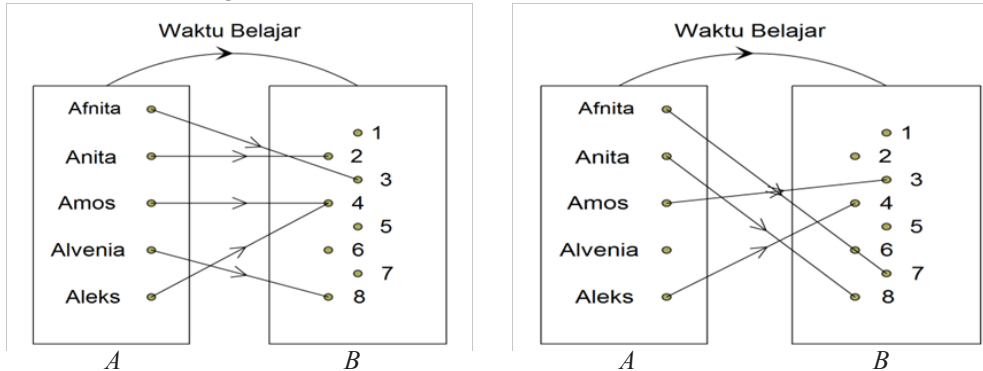
Masalah-5.2

Lima orang siswa yaitu: Afnita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka, hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

1) Kelima sahabat itu satu himpunan misalnya himpunan A, dan lama waktu belajar dalam satu hari, himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
   b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan dua atau lebih anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!

2) Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan C, dan data tentang banyak saudara mereka membentuk himpunan, $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurut anda yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
   b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan dengan anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan dua atau lebih anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui: A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   a. Relasi yang mungkin yang menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.

Gambar 5.7: Relasi rata-rata jam belajar

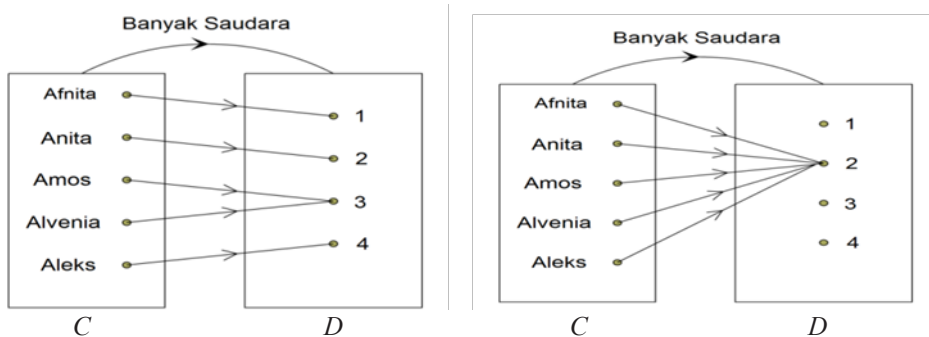
   b. Jawabannya adalah tidak. Oleh sebab anggota himpunan B telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan bisa seluruhnya memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.
   c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan A akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan B.

d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan A memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan B.

2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan C, dan data tentang banyak saudara mereka himpunan D.

   Diketahui: C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}

   $D = \{1, 2, 3, 4\}$

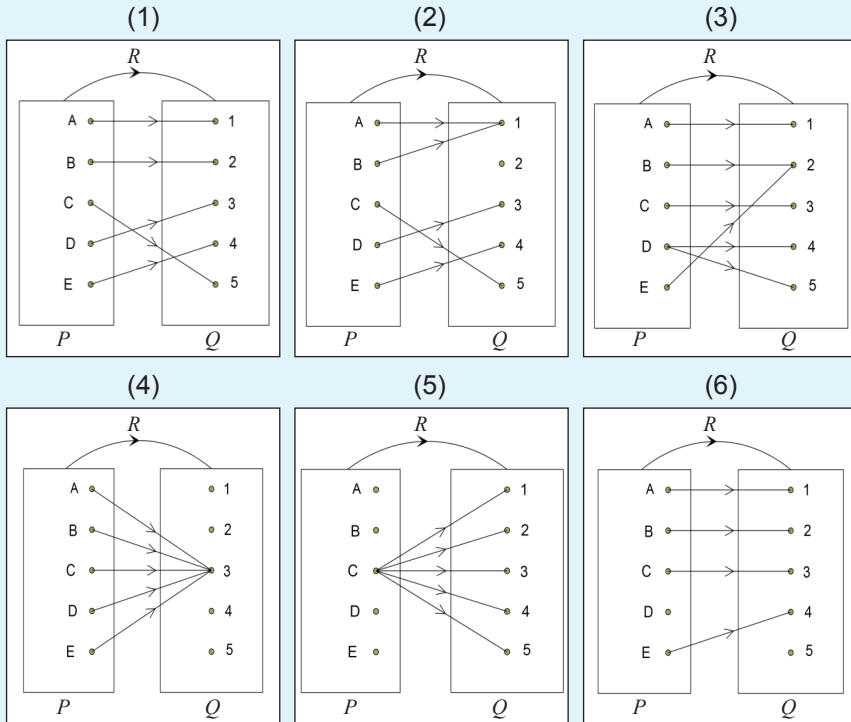
   a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu, ditunjukkan pada diagram panah berikut.

Gambar 5.8 Relasi banyak saudara

   b) Jawabannya ya. Oleh karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan D, maka seluruh anggota himpunan C pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan D.

   c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan C akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan D.

   d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan C memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan D.

Masalah-5.3

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.

- *Guru harus mengarahkan agar siswa mampu menemukan fakta-fakta yang berkaitan dengan perkawanan relasi-relasi yang diberikan.*

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q

– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q

– Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 2:
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 3:
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 4:
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 5:
- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 6:
- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 2:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 3:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 4:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 1, relasi 2 dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
– Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 5.6

Misalkan A dan B himpunan.
Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Definisi 5.6 di atas, secara simbolik ditulis menjadi $f : A \to B$, dibaca: fungsi f memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh fungsi f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan x disebut prapeta dari y, dengan demikian dapat ditulis menjadi:
$f : x \to y$, dibaca: fungsi f memetakan x ke y, sedemikian sehingga $y = f(x)$.
Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

Penyelesaian

1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu D yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan P memiliki pasangan di anggota himpunan Q.
2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
   a. Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{A, B, D, E\}$.
   b. Ada anggota himpunan P yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu $\{C\}$.
3) Relasi 6 bukan merupakan fungsi karena ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan aggota himpunan Q yaitu $\{D\}$.

Contoh 5.12

Diketahui fungsi $f : x \to f(x)$ dengan rumus fungsi $f(x) = px - q$. Jika $f(1) = -3$ dan $f(4) = 3$. Tentukanlah nilai p dan q, kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

Penyelesaian

Diketahui $f(x) = px - q$.

$f(1) = -3$

$f(4) = 3$.

Ditanya p, q, dan Rumus fungsi

Jika $f(1) = -3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow -3 = p - q$ .... (1)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika $f(4) = 3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow 3 = 4p - q$ .... (2)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika persamaan 1) dan persamaan 2) dieliminasi maka diperoleh:

$$\begin{array}{l} -3 = p - q \\ \underline{3 = 4p - q} \; - \\ -6 = p - 4p \rightarrow -6 = -3p \rightarrow p = 2 \end{array}$$

Substitusi nilai $p = 2$ ke persamaan $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$-3 = 2 - q$

$-3 = 2 - q \rightarrow q = 2 + 3 \rightarrow q = 5$

Jadi diperoleh $p = 2$ dan $q = 5$

Berdasarkan kedua nilai ini, maka rumus fungsi $f(x) = px - q$ menjadi $f(x) = 2x - 5$.

Contoh 5.13

Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = \sqrt{2x+6}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

Penyelesaian

Diketahui: $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Ditanya: domain f

Domain fungsi f memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila

$2x + 6 \geq 0$,

$2x \geq -6 \leftrightarrow x \geq -3$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

a) Mengapa fungsi f memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real apabila $2x + 6 \geq 0$.

b) Apakah f terdefinisi untuk $2x + 6 < 0$?

c) Apakah $x = -4$ memiliki pasangan? Mengapa?

Contoh 5.14

Diketahui f suatu fungsi $f : x \rightarrow f(x)$. Jika 1 berpasangan dengan 4 dan $f(x+1) = 2f(x)$. Berapakah pasangan dari $x = 4$?

Penyelesaian

Diketahui: $f : x \rightarrow f(x)$
$f(1) = 4$
$f(x+1) = 2\,f(x)$

Ditanya: $f(4)$?

$\rightarrow f(x+1) = 2f(x)$

$\rightarrow$ untuk $x = 1$, maka $f(1+1) = 2f(1)$

$\rightarrow f(2) = 2.f(1) = 2.4 = 8$

$\rightarrow f(3) = 2.f(2) = 2.8 = 16$

$\rightarrow f(4) = 2.f(3) = 2.16 = 32$

$\rightarrow$ maka $x = 4$ berpasangan dengan 32 atau $f(4) = 32$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

a) Berapakah pasangan dari $x = 2013$?

b) Bagaimana cara paling cepat untuk menemukan pasangan dari $x = 2013$?

- *Guru mengarahkan dan memberi petunjuk untuk menentukan pasangan 2013 dan cara paling cepat untuk menentukannya.*

Contoh 5.15

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Penyelesaian

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Diketahui: $y = \frac{x+2}{2x-6}$, dimana $2x - 6 \neq 0$ dan x anggota bilangan real.

Ditanya: rumus fungsi y ke x.

$\rightarrow \; y = \frac{(x+2)}{(2x-6)}$ (kedua ruas kalikan dengan $2x - 6$)

$\rightarrow \; (2x - 6)(y) = x + 2$

$\rightarrow \; 2xy - 6y = x + 2$

$\rightarrow \; 2xy - x = 6y + 2$

$\rightarrow \; x(2y - 1) = 6y + 2$

$\rightarrow \; x = \frac{(6y+2)}{(2y-1)}$ (kedua ruas bagi dengan $2y - 1$)

Maka fungsi g memetakan y ke x dengan rumus: $g(y) = \frac{x+2}{2x-6}$

♦ *Guru mengarahkan siswa untuk memahami masalah berikut yang disajikan berikut ini.*

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

a) Jika f: $x \rightarrow y$, apakah $x = 3$ memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?

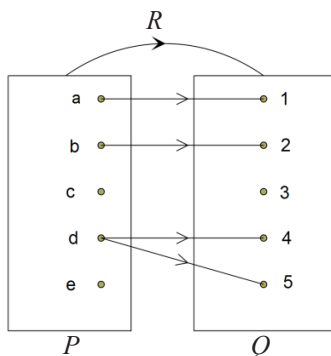
b) Jika g: $y \rightarrow x$. apakah $x = \frac{1}{2}$ memiliki pasangan di anggota himpunan real? Mengapa?

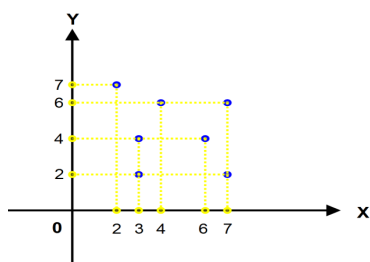
c) Berikan syarat agar f: $x \rightarrow y$ dapat terdefinisi.

d) Berikan syarat agar g: $y \rightarrow x$ dapat terdefinisi.

Uji Kompetensi 5.1

1) Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi berikut.

   a)

   b) Relasi pasangan berurutan: {(Yaska, Nora), (Riwanti, Pasaribu), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)}

   c)

2) Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu (Margono, Marsius, Maradona, Marisa, Martohap) berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia masing-masing anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah asilnya!

3) Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nyatakanlah relasi A terhadap B dengan relasi berikut.

   a) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = A + 1$.

   b) Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi $B = 2A + 2$.

   Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak.

4) Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!

5) Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$ tentukanlah $f(-x)$.

6) Jika $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, tuliskanlah x sebagai fungsi dari y. Kemudian tentukanlah syarat kedua rumus fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap x,y merupakan bilangan real.

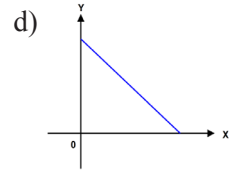
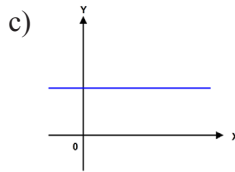
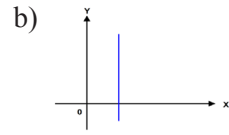
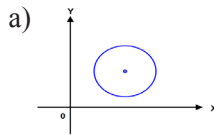
7) Diketahui $f(2x-3) = 4x-7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah….

8) Bila $f(x) = \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b^2}{x^2}\right] + \dfrac{x}{b}\left[1 - \dfrac{a^2}{x^2}\right]$, maka $f(a+b) = \ldots$

9) Misalkan $f(n)$ didefiniskan kuadrat dari penjumlahan digit n. Misalkan juga $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan $f(f(f(n)))$ dan seterusnya.Tentukan $f^{1998}(11)$!

10) Diketahui fungsi f dengan rumus $f = \sqrt{\dfrac{1}{2}x - 8}$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

11) Perhatikan gambar berikut!

Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu x.

Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Tuliskan ciri-ciri fungsi tersebut, dan buat interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada bahasan 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota daerah asal (*domain*) dengan tepat satu anggota daerah kawan (*kodomain*). Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi anda dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, dan fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Selanjutnya akan dibahas tentang barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu

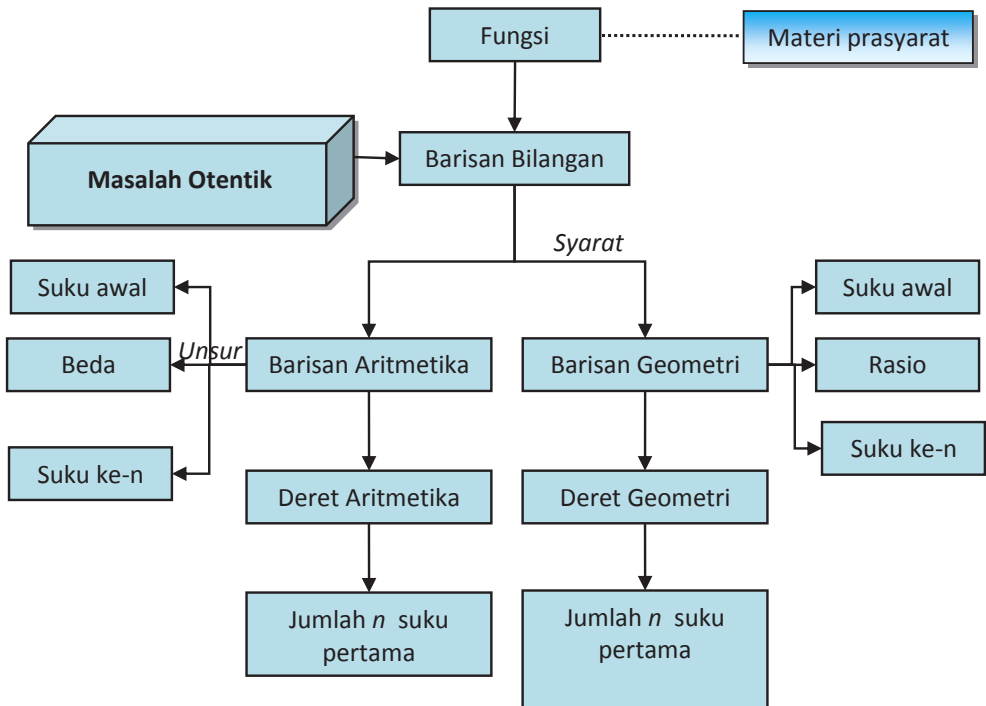
Barisan dan Deret

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran barisan dan deret, siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. memprediksi pola barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya melalui pengamatan dan memberikan alasannya; 3. menyajikan hasil menemukan pola barisan dan deret dan penerapannya dalam penyelesaian masalah sederhana.	Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Suku*
- *Jumlah n suku pertama*

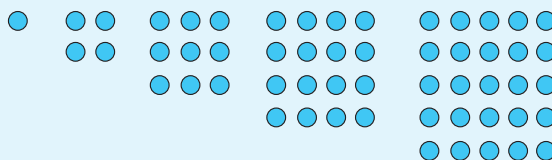
B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

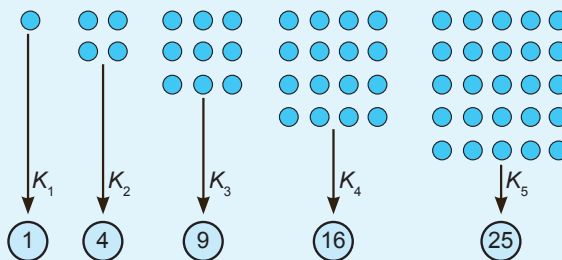
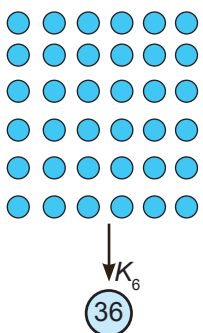
1. Menemukan Pola Barisan dan Deret

Organisasikan siswa belajar dengan mengamati dan mengkritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan dan deret akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah. Guru melatih siswa berpikir independen, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka. Membangun hubungan-hubungan dengan melibatkan objek-objek nyata serta mengkomunikasikan permasalahan melalui diagram, skema, tabel dan simbol-simbol.

Permasalahan-permasalahan yang dijumpai dalam kehidupan biasanya dapat diselesaikan dengan menerapkan suatu cara, metode, atau aturan matematika tertentu. Hal itu dilakukan dengan alasan agar permasalahan tersebut dapat menjawab kebutuhan yang diinginkan. Tahukah anda maksud/arti dari pola? Pernahkah anda melihat pola dalam kehidupan sehari-hari? Ajukan masalah berikut kepada siswa, untuk mengetahui berapa banyak jeruk dalam tumpukan?

Masalah-6.2

Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut:

Gambar 6.1 Susunan Kelereng

Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan: 1, 4, 9, 16, 25.

Gambar 6.2 Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok

Permasalahan:
Dapatkah kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkah kamu temukan pola barisan tersebut? Tentukan banyak kelereng pada kelompok ke-15?

Alternatif Penyelesaian

1.

Kemungkinan metode yang dapat digunakan adalah membuat susunan benda berikutnya dan menghitung kembali banyak kelereng pada susunan itu.
Alternatif penyelesaian ini tidak efektif dan tidak efisien karena harus menyusun kembali banyak kelereng untuk kelompok berikutnya.

Gambar 6.3 Jumlah kelereng pada kelompok ke-6

2. Alternatif penyelesaian lainnya adalah menemukan pola barisan tersebut. Perhatikan tabel berikut!

Tabel 6.1 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 \times 1$
K_2	4	$4 = 2 \times 2$
K_3	9	$9 = 3 \times 3$
K_4	16	$16 = 4 \times 4$
K_5	25	$25 = 5 \times 5$
...	...	...
K_n	?	$? = n \times n$

Dengan pola barisan pada tabel di atas, bilangan berikutnya adalah $K_6 = 6 \times 6 = 36$ dan bilangan pada $K_{15} = 15 \times 15 = 225$.

3. Apakah ada pola yang lain pada barisan tersebut? Silahkan amati kembali tabel berikut!

Tabel 6.2 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 + 0 = 1 + 1 \times 0$
K_2	4	$4 = 2 + 2 = 2 + 2 \times 1$
K_3	9	$9 = 3 + 6 = 3 + 3 \times 2$
K_4	16	$16 = 4 + 12 = 4 + 4 \times 3$
K_5	25	$25 = 5 + 20 = 5 + 5 \times 4$
...	...	...
K_n	?	$? = n + n \times (n - 1)$

Jadi pola barisan adalah $K_n = n + n \times (n-1)$ sehingga bilangan berikutnya adalah dan bilangan pada $K_{15} = 15 + 15 \times 14 = 225$.

Kamu dapat dengan mudah menentukan bilangan-bilangan berikutnya pada sebuah barisan bilangan jika dapat menemukan pola barisannya. Silahkan pelajari pola barisan pada beberapa contoh berikut.

Contoh 6.1

Perhatikan barisan huruf berikut:

A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D ...

Amatilah barisan huruf tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah huruf pada urutan $2^5 \times 3^3$!

Penyelesaian

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap huruf pada barisan, sebagai berikut:

A	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	*A*	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok huruf *ABBCCCDDDD* pada urutan 1 sampai 10 berulang, bukan? Perulangan kelompok huruf terjadi pada setiap kelipatan 10 huruf pertama. Jadi, huruf pada urutan 1 sama dengan huruf pada urutan 11, urutan 21, urutan 31 dan seterusnya.

Kedua, huruf pada urutan $2^5 \times 3^3$ adalah huruf pada urutan $32 \times 27 = 864$ atau $864 = 860 + 4 = 86 \times 10 + 4$ sehingga perulangan kelompok huruf tersebut mengalami perulangan sebanyak 86 kali. Dengan demikian, huruf pada urutan ke-864 sama dengan huruf pada urutan ke-4 atau *C*, bukan? Perhatikan tabel di bawah ini!

Tabel 6.3 Urutan barisan huruf

Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf	...	Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf
1	*A*	11	*A*	...	851	*A*	861	*A*
2	*B*	12	*B*	...	852	*B*	862	*B*
3	*B*	13	*B*	...	853	*B*	863	*B*
4	*C*	14	*C*	...	854	*C*	864	*C*
5	*C*	15	*C*	...	855	*C*		
6	*C*	16	*C*	...	856	*C*		
7	*D*	17	*D*	...	857	*D*		
8	*D*	18	*D*	...	858	*D*		
9	*D*	19	*D*	...	859	*D*		
10	*D*	20	*D*	...	860	*D*		

Contoh 6.2

Sebuah barisan bilangan dituliskan sebagai berikut: 1234567891011121314151617181920212223242526... sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1 dan seterusnya. Dapatkah anda temukan bilangan yang menempati suku ke-2004?

Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, sebagai berikut:

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan n = 1, 2, 3, 4, ...

Kita akan mencari bilangan yang menempati suku ke-2004 dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (1sampai 9):
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 9 = 9$ suku.

Langkah 2. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 99)

10, 11, 12, 13, ...,19 terdapat 2×10 suku = 20 suku
20, 21, 22, 23, ...,29 terdapat 2×10 suku = 20 suku
...
90, 91, 92, 93, ..., 99 terdapat 2×10 suku = 20 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 20 = 180$ suku.
Jadi, banyak suku pada barisan 1 sampai 99 adalah $9 + 180 = 189$ suku.

Langkah 3. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (100 sampai 999)

Jika ratusan (1 sampai 6)
100, 101, 102, 103, ..., 109 terdapat 3×10 suku = 30 suku
110, 111, 112, 113, ..., 119 terdapat 3×10 suku = 30 suku
120, 121, 122, 123, ..., 129 terdapat 3×10 suku = 30 suku
690, 691, 692, 693, ..., 699 terdapat 3×10 suku = 30 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dengan ratusan 1 sampai 6 adalah $6 \times 10 \times 30 = 1800$ suku

Jadi terdapat sebanyak $9 + 180 + 1800 = 1989$ suku pada barisan bilangan 1 sampai dengan 699 sehingga suku ke-1989 adalah 9. Suku berikutnya (suku ke-1990) adalah barisan bilangan dengan ratusan 7 sebagai berikut.

9	7	0	0	7	0	1	7	0	2	7	0	3	7	0	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$u1989$	$u1990$	$u1991$	$u1992$	$u1993$	$u1994$	$u1995$	$u1996$	$u1997$	$u1998$	$u1999$	$u2000$	$u2001$	$u2002$	$u2003$	$u2004$

Bilangan pada suku ke-2004 adalah 4.

Contoh 6.3

Tentukan pola barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots, \frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut!

Penyelesaian

Jika adalah suku ke-n dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.4 Pola Barisan

Suku ke	Nilai	Pola
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{1^2+1}$
u_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{2^2+2}$
u_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}=\frac{1}{3^2+3}$
u_4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}=\frac{1}{4^2+4}$
u_5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}=\frac{1}{5^2+5}$
u_6	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}=\frac{1}{6^2+6}$
...	...	...
u_n	?	$?=\frac{1}{n^2+n}$

Berdasarkan pola barisan $u_n=\frac{1}{n^2+n}$ yang telah diperoleh pada tabel di bawah maka $u_n=\frac{1}{9900}$ atau

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{9900}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2+n=9900$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2+n-9900=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-99)(n+100)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad n=99$$

Barisan $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{42},\ \ldots\ ,\frac{1}{9900}$ terdiri dari 99 suku.

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka deret dari barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.5: Pola Deret

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	$\frac{1}{2}$
s_2	$u_1 + u_2$	$\frac{2}{3}$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$\frac{3}{4}$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$\frac{4}{5}$
s_5	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{5}{6}$
s_6	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{6}{7}$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_n$	$s_n = \frac{n}{n+1}$

Berdasarkan tabel di atas, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ..., yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots$ adalah sebuah barisan dengan pola $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Karena $n = 99$ maka $s_{99} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{9900} = \frac{99}{100}$.

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ atau $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ dan $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$ maka $s_n = s_{n-1} + u_n$ atau $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Contoh 6.4

Suatu barisan dengan pola deret $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10!

Penyelesaian

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ atau $s_m = 2m^3 - 3m^2$. Misalkan $m = n - 1$ maka

$$s_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$s_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$s_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$u_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $u_n = 6n^2 - 12n + 5$ sehingga:

$$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

2. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Aritmetika

Pada sub-bab di atas, kita telah membicarakan masalah pola dari barisan dan deret bilangan secara umum. Berikutnya, kita akan belajar menemukan konsep barisan dan deret aritmetika.

a. Barisan Aritmetika

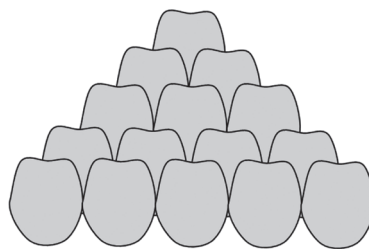
Masalah-6.2

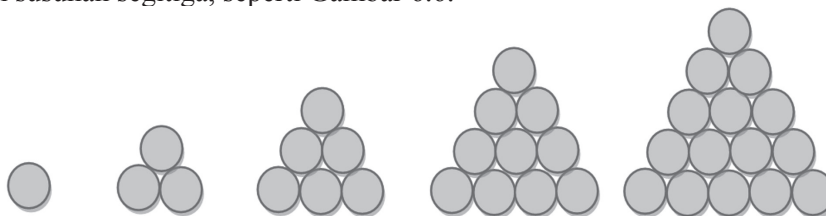
Gambar 6.4 Tumpukan Buah Jeruk

Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak buah dalam satu tumpukan?

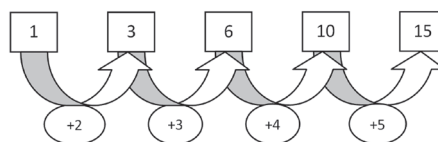
Alternatif Penyelesaian

Jika diperhatikan Gambar 6.5, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida.

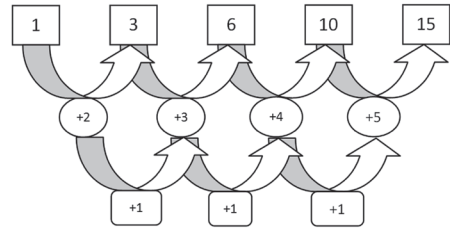
- *Arahkan siswa membangun pola dengan memilih strategi berpikir secara bebas. Selanjutnya organisasikan siswa belajar dalam kelompok untuk mendiskusikan cara atau pola yang dibangun secara individu. Jika terjadi perbedaan pola pikir, jembatani dengan meminta salah satu kelompok menyajikan hasil kerjannya.*

Gambar 6.5 Susunan piramida jeruk

Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti Gambar 6.6.

Gambar 6.6 Susunan bulatan bentuk segitiga

- *Tanyakan kepada siswa mengapa harus dengan susunan segitiga, coba suruh siswa untuk melakukan dengan susunan segi empat, lalu tanyakan apa yang ditemukan.*

Selanjutnya ajak siswa untuk memperhatikan bilangan-bilangan tersebut, ternyata diperoleh selisih antara bilangan pertama dengan bilangan kedua, bilangan kedua dengan bilangan ketiga, bilangan ketiga dengan bilangan keempat dan seterusnya, seperti yang disajikan pada Gambar 6.7 berikut.

Gambar 6.7. Pola susunan banyak jeruk dalam tumpukan

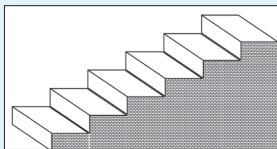
- *Meminta siswa mengecek, untuk susunan segitiga berikutnya, banyak sankisnya 21, sehingga selisih banyak sankis berikutnya adalah 6. Selanjutnya meminta siswa mencermati dua suku yang berurutan.*

Banyaknya bulatan yang tersusun dari setiap kelompok dapat dituliskan dengan bilangan, yaitu 1, 3, 6, 10, 15. Bila bilangan tersebut membentuk barisan perhatikan polanya pada Gambar 6.8 tersebut.

Gambar 6.8. Pola turunan banyak jeruk dalam tumpukan

Ternyata beda antara setiap dua bilangan yang berdekatan membentuk barisan yang baru yaitu 2, 3, 4, 5,... Perhatikan skema berikut.

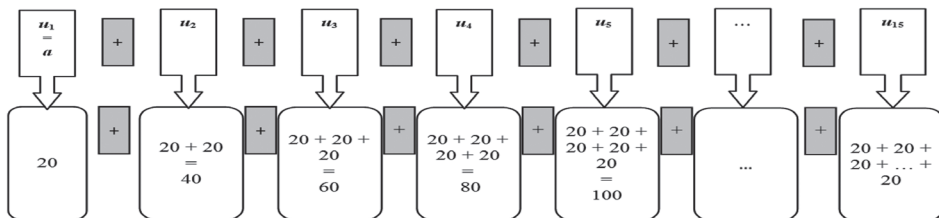
Beda setiap dua bilangan yang berdekatan pada barisan 2, 3, 4, 5,... adalah tetap yaiti 1. Dengan demikian barisan 2, 3, 4, 5,... disebut "Barisan Aritmetika" dan barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut "Barisan Aritmetika Tingkat Dua".

- *Meminta siswa untuk membuat sebuah barisan dengan beda membentuk barisan baru yaitu barisan aritmatika tingkat 1.*
- *Selanjutnya minta siswa mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan mendorong siswa lain untuk mengkritisi hasil kerja siswa yang menyaji.*

Masalah-6.3

Perhatikan masalah berikut!
Jika tinggi satu buah anak tangga adalah 20 cm, berapakah tinggi tangga jika terdapat 15 buah anak tangga? Tentukanlah pola barisan?

Gambar 6.9: Tangga

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan tinggi tangga maka permasalahan di atas diurutkan menjadi:

Dari uraian di atas, ditemukan susunan bilangan 20, 40, 60, 80, …

u_n : suku ke-n
$u_1 = 20 = 1 \times 20$
$u_2 = 40 = 2 \times 20$
$u_3 = 60 = 3 \times 20$
$u_4 = 80 = 4 \times 20$
$u_5 = 100 = 5 \times 20$
...
$u_n = n \times 20 = 20n$
Cermati pola bilangan $u_n = 20n$, sehingga $u_{15} = 15 \times 20 = 300$.
Berarti tinggi tangga tersebut sampai anak tangga yang ke-15 adalah 300 cm.

Masalah-6.4

Mbak Suci, seorang pengerajin batik di Gunung Kidul, ia dapat menyelesaikan 6 helai kain batik berukuran 2,4 m × 1,5 m selama 1 bulan. Permintaan kain batik terus bertambah sehingga Mba Suci harus menyediakan 9 helai kain batik pada bulan kedua, dan 12 helai pada bulan ketiga. Dia menduga, jumlah kain batik untuk bulan berikutnya akan 3 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Dengan pola kerja tersebut, pada bulan berapakah Mbak Suci menyelesaikan 63 helai kain batik?

Alternatif Penyelesaian

Dari Masalah-6.4, dapat dituliskan jumlah kain batik sejak bulan pertama seperti di bawah ini.
Bulan I : $u_1 = a = 6$
Bulan II : $u_2 = 6 + 1.3 = 9$
Bulan III : $u_3 = 6 + 2.3 = 12$
Bulan IV : $u_4 = 6 + 3.3 = 15$
Demikian seterusnya bertambah 3 helai kain batik untuk bulan-bulan berikutnya sehingga bulan ke-n : $u_n = 6 + (n–1).3$ (n merupakan bilangan asli).
Sesuai dengan pola di atas, 63 helai kain batik selesai dikerjakan pada bulan ke-n. Untuk menentukan n, dapat diperoleh dari,
$63 = 6 + (n – 1).3$
$63 = 3 + 3n$
$n = 20$.
Jadi, pada bulan ke-20, Mbak Suci mampu menyelesaikan 63 helai kain batik.
Jika beda antara dua bilangan berdekatan di notasikan “b”, maka pola susunan bilangan 6, 9, 12, 15,…, dapat dituliskan $u_n = a + (n – 1).b$.

Definisi 6.1

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama.

Beda, dinotasikan "b" memenuhi pola berikut.

$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ... = u_n - u_{(n-1)}$

u adalah bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke-n.

Berdasarkan definisi di atas maka diperoleh bentuk umum barisan aritmetika sebagai berikut.

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$$

Setiap dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, maka diperoleh

$u_1 \;=\; a$
$u_2 \;=\; u_1 + 1.b$
$u_3 \;=\; u_2 + b = u_1 + 2.b$
$u_4 \;=\; u_3 + b = u_1 + 3.b$
$u_5 \;=\; u_4 + b = u_1 + 4.b$
$\ldots$
$u_n \;=\; u_1 + (n - 1)b$

Sifat-1

Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika. Rumus suku ke-n dari barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

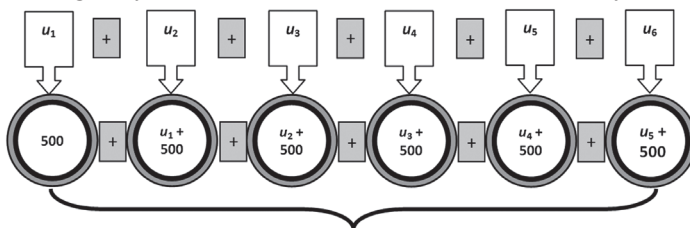
$$u_n = a + (n - 1)b$$

$a = u_1$ adalah suku pertama barisan aritmetika
b adalah beda barisan aritmetika

Masalah-6.5

Setiap hari Orlyn menabungkan sisa uang jajannya. Uang yang ditabung setiap hari selama enam hari mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama a = 500 dan beda b = 500.
Bagaimana cara mengetahui banyaknya uang Orlyn yang ditabung pada hari ke-6?

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian Masalah-6.5 dapat dilakukan dengan membuat barisan aritmetika dari uang yang ditabung Orlyn kemudian menentukan suku terakhirnya.

Karena $u_n = a + (n - 1)b$ maka $u_6 = (a + 5b)$
$= 500 + 5(500)$
$= 500 + 2500$
$= 3000$

Berarti tabungan Orlyn pada hari ke-6 adalah Rp3000,00.

Contoh 6.5

Tentukan nilai dari suku yang ditanya pada barisan di bawah ini!

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, … tentukan suku ke-15 !

b. 4, 1, – 2, – 5, – 8, … tentukan suku ke-18!

Penyelesaian

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
Dari barisan bilangan tersebut, diketahui bahwa
$u_1 = a = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \ldots.$
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 1.$
Karena $u_n = a + (u - 1)b$, maka $u_{15} = a + (15 - 1)b$.
$u_{15} = 1 + (15 - 1).1 = 15$

b. 4, 1, – 2, – 5, – 8, …
Diketahui:
$u_1 = a = 4, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = -5 \ldots.$
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -3.$
Karena $un = a + (n - 1)b$, maka $u_{18} = \mathrm{a} + (18 - 1)b$.
$u_{18} = 4 + (18 - 1).\ (-3) = -47$

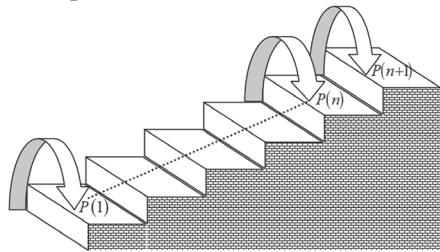
b. Induksi Matematika

Misalkan untuk setiap bilangan asli n kita mempunyai pernyataan $P(n)$.

1. $P(1)$ bernilai benar.
2. Jika $P(n)$ benar, maka $P(n-1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Maka $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

$P(1)$ bernilai benar disebut langkah dasar sedangkan jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$ disebut langkah induktif.

Prinsip pembuktian induktif dapat diilustrasikan dengan proses menaiki anak tangga.

Gambar 6.10 Anak Tangga

 Contoh 6.6

Selidiki apakah jumlah n bilangan asli pertama, yaitu $1 + 2 + \ldots + n$ sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$!

Penyelesaian

Misalkan pernyataan $P(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Menunjukkan pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$, diperoleh $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ maka untuk $n = 1$ peryataan tersebut benar.
2. Anggap pernyataan tersebut benar untuk $n = k$ yakni:

   $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.
3. Akan dibuktikan pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$, yaitu:

   $$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$

   Bukti:

   Dengan menggunakan manipulasi aljabar diperoleh:

   $$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1).(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1).\left((k+1)+1\right)}{2}$$

Berarti untuk $n = k + 1$, $P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar.

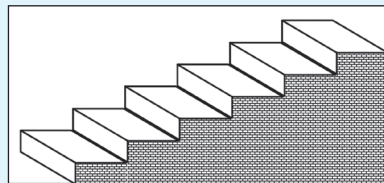
Jadi, $P(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ adalah benar untuk n anggota himpunan bilangan asli.

- *Guru mengarahkan siswa meenyelediki kebenaran pernyataan 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n – 1) = n^2 dengan menggunakan pembuktian induksi matematika.*
- *Ajukan masalah 6 pada siswa, minta siswa memahami masalahnya dengan pemahamannya sendiri. Beri kesempatan pada siswa bertanya hal-hal yang tidak dipahami. Selanjutnya minta siswa mempresentasikan hasil pemahamannya di depan kelas dan mendorong siswa lain untuk mengkritisi hasil kerja siswa yang menyaji.*

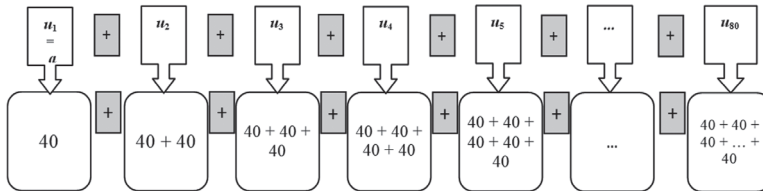
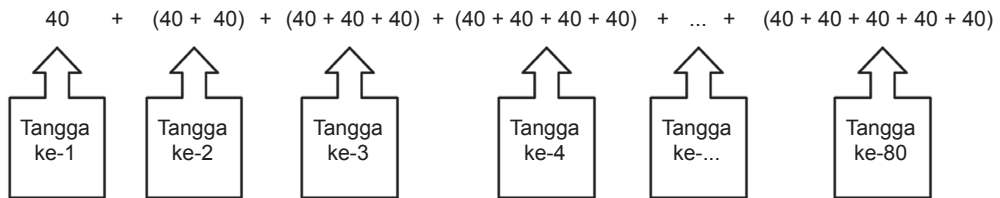
c. Deret Aritmetika

- *Ajak siswa untuk memperhatikan masalah 6.6 dan suruh siswa untuk memahami masalahnya!*

Masalah-6.6

Perhatikan kembali gambar di samping! Apakah kamu masih ingat tentang masalah anak tangga? Jika membuat sebuah anak tangga dibutuhkan 40 buah batu bata, berapa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 buah anak tangga?

Gambar 6.11: Tangga

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan banyaknya batu bata yang dibutuhkan dalam membuat anak tangga pertama sampai anak tangga yang ke 80 dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.

Berdasarkan gambar di atas dapat disimpulkan bahwa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 buah anak tangga:

Susunan banyak batu bata membentuk barisan aritmetika:
40, 80, 120, 160, 200, 240, 280,320, 360, 400,….
Cukup jelas, bahwa, $u_1 = 40$ dan $b = 40$.
Karena pertanyaan dalam masalah ini adalah banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga, bukan banyak batu bata yang diperlukan membuat tangga ke-80 maka banyak batu bata harus dijumlahkan.

$$\underbrace{40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 400 + \ldots + 3160 + 3200}_{\text{sebanyak 80 suku}}$$

s_n adalah jumlah n suku pertama pada barisan. Perhatikan pola berikut:

- $s_2 = 40 + 80 = \dfrac{(40 + 80) \times 2}{2} = 120$
- $s_4 = 40 + 80 + 120 + 160 = \dfrac{(40 + 160) \times 4}{2} = 400$
- $s_6 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 = \dfrac{(40 + 240) \times 6}{2} = 840$
- $s_8 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 = \dfrac{(40 + 320) \times 8}{2} = 1440.$

Jadi, untuk menghitung jumlah 80 suku pertama, dilakukan dengan pola di atas,
$s_{80} = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 360 + 400 + \ldots + 3160 + 3200$

$= \dfrac{(40+3200)\times 80}{2} = 129.000.$

Jadi, banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga adalah 129.000 buah batu bata.

- *Guru mengarahkan siswa menyelidiki rumusan pola untuk menghitung jumlah 3 suku pertama, 5 suku pertama, 15 suku pertama.*
- *Guru memastikan siswa mampu memanipulasi cara pembentukan pola di atas.*

Susunan jumlah suku-suku barisan aritmetika, dinyatakan sebagai berikut.

$s_1 = u_1$

$s_2 = u_1 + u_2$

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$

$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

...

$s_{(n-1)} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)}$

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$

n merupakan bilangan asli.

Definisi 6.2

Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama barisan aritmetika, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{(n-1)}, s_n, \ldots$ dengan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$

Untuk menentukan jumlah n suku pertama, ditentukan rumus berikut:

$s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$ .... (1)

Persamaan 1) diubah menjadi

$s_n = (a + (n - 1)b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$ .... (2)

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$2s_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \ldots + 2a + (n - 1)b$

$2s_n = n\,(2a + (n - 1)b)$

$s_n = \dfrac{1}{2}n\left(2a+\left(n-1\right)b\right)$

Sifat-2

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ merupakan jumlah n suku pertama barisan aritmetika,

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

Contoh 6.7

Carilah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9!

Penyelesaian

Bilangan bulat yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 50 adalah

$$9, 18, 27, \ldots, 99$$

Bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 9$, $b = 9$, dan $u_n = 99$. Selanjutnya akan ditentukan nilai n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_n = 99 \quad &\Leftrightarrow \quad a + (n-1)b = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 + (n-1)9 = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 + 9n - 9 = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9n = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad n = 10 \end{aligned}$$

Jadi, banyak bilangan yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 50 adalah 10. Dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika diperoleh:

$$s_n = \frac{1}{2}n\left(a + u_n\right) \text{ atau } s_{10} = \frac{1}{2}(10)(9 + 99) = 540$$

Dengan demikian, $9 + 18 + 27 + 36 + 45 + \ldots + 99 = 540$.

Contoh 6.8

Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + ... + 50 = 1139$. Jika a bilangan bulat positif, maka nilai $a = ...$

Penyelesaian

Suku ke-n barisan bilangan di atas adalah 50, sehingga

$$\begin{aligned} u_n = a + (n-1)b \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = a + (n-1).1 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 51 - n. \end{aligned}$$

Jumlah n suku pertama adalah 1.139 sehingga

$$sn = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \Leftrightarrow 1139 = \frac{n}{2}(2.a + (n-1)1), \text{ atau}$$
$$\Leftrightarrow 2278 = n\left((2.a + (n-1)\right).$$

Dengan mensubtitusikan $a = 51 - n$, diperoleh $n^2 - 101n + 2278 = 0$.

- *Jika siswa lupa akan konsep menentukan akar-akar persamaan kuadrat, guru mengingatkan kembali kepada siswa. Buat contoh.*

$n^2 - 101.n + 2278 = 0 \Leftrightarrow (n - 67).(n - 34) = 0$.
diperoleh, $n = 67$ atau $n = 34$. Jika nilai a bilangan bulat positif maka nilai yang memenuhi adalah $n = 34$ sehingga nilai $a = 17$.

Contoh 6.9

Diketahui deret aritmetika tingkat satu dengan s_n adalah jumlah n suku pertama. Jika $s_n = (m^3 - 1)\ n^2 - (m^2 + 2)\ n + m - 3$, maka tentukanlah suku ke-10 pada barisan tersebut!

Penyelesaian

Dengan mengingat kembali rumus deret aritmetika tingkat satu:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{b}{2}n^2 + (a-b)n$$

maka
$s_n = (m^3 - 1)\ n^2 - (m^3 + 2)\ n + m - 3$ akan menjadi deret aritmetika tingkat satu jika $m - 3 = 0$ atau $m = 3$ sehingga $s_n = 26n^2 - 11n$.
Jadi, $u_{10} = s_{10} - s_9 = 2490 - 2007 = 483$.

Uji Kompetensi 6.1

1. Tentukan jumlah deret aritmetika berikut!
   a. 3 + 6 + 9 + 12 + ... sampai dengan 18 suku.
   b. 2 + 8 + 14 + 30 + ... sampai dengan 10 suku.
   c. 1 + 6 + 11 + 16 + ... sampai dengan 14 suku.
   d. 50 + 46 + 42 + 38 + ... sampai dengan 10 suku.
   e. –22 – 16 – 10 – 4 – ... sampai dengan 20 suku.

2. Tentukan banyak suku dan jumlah deret aritmetika berikut!
   a. 4 + 9 + 14 + 19 + ... + 104
   b. 72 + 66 + 60 + 54 + ... – 12
   c. –12 – 8 – 4 – 0 – ... – 128
   d. –3 – 7 – 11 – 15 ... – 107

3. Tentukan banyak suku dari deret berikut!
   a. 6 + 9 + 12 + 15 + ... = 756
   b. 56 + 51 + 46 + 41 + ... = – 36
   c. 10 + 14 + 18 + 22 + ... = 640

4. Diketahui deret aritmetika dengan suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukanlah jumlah 20 suku pertama!

5. Bila a, b, c merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$.

6. Banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 adalah….

7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …
   Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004 ? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

8. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan persamaan berikut ini benar!
   a. $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
   b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + .. + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

9. Pola A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D ... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6 3^4$?

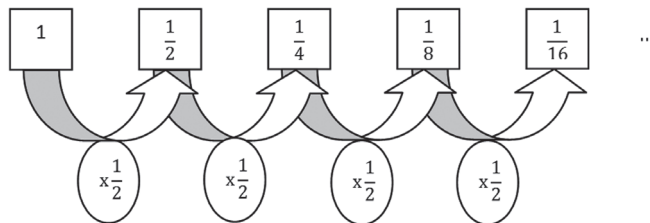
10. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …
    Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2013? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

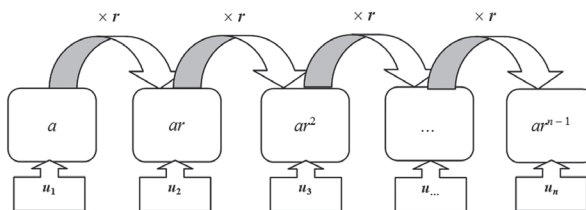
Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret aritmatika dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmatika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

3. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Perhatikan susunan bilangan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $1, 1\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$

Perhatikan gambar berikut!

Sehingga:

- $u_1 = a = 1$
- $u_2 = u_1.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}$ $\quad\Leftrightarrow\quad u_2 = u_1.r = a.r$

- $u_3 = u_2.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow u_3 = u_2.r = a.r.r = a.r^2$
- $u_4 = u_3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Leftrightarrow u_4 = u_3.r = a.r^2.r = a.r^3$
- $u_5 = u_4.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Leftrightarrow u_5 = u_4.r = a.r^3.r = a.r^4$

Dari pola di atas, tentunya dengan mudah kamu pahami bahwa,

$$u_n = u_{n-1}.r = a.r^{n-2}\ r = a.r^{n-1}$$

Orlando memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.

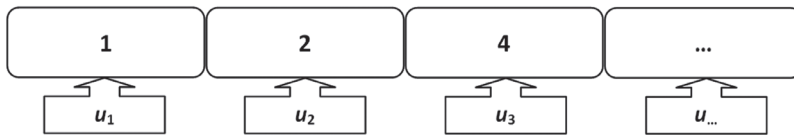
Gambar 6.12 Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.

Gambar 6.13 Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.

Gambar 6.14 Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Orlando terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia selalu membuka hasil lipatan dan mendapatkan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian sebelumnya. Sekarang, perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.

Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2.$ Barisan bilangan ini disebut **barisan geometri**.

Definisi 6.3

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berurutan.
Nilai r dinyatakan: $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots \frac{u_n}{u_{n-1}}.$

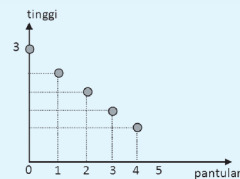
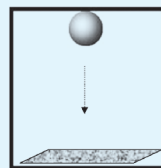
Sifat-3

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r adalah rasio, maka suku ke-n dinyatakan
$u_n = ar^{n-1}$, n adalah bilangan asli.

b. Deret Geometri

Analog dengan konsep deret aritmetika, deret geometri juga penjumlahan bilangan-bilangan berurutan yang memiliki pola geometri. Cermati masalah di bawah ini!

Masalah-6.8

Sebuah bola jatuh dari gedung setinggi 3 meter ke lantai dan memantul kembali setinggi $\frac{4}{5}$ kali dari tinggi sebelumnya Tentukanlah panjang lintasan bola tersebut sampai pada pantulan ke-10!

Gambar 6.15 Pantulan Bola

Pandang dan amatilah kembali gambar di atas! Tampak pada Gambar 6.15 bahwa terdapat 2 kali lintasan bola yang sama tingginya setelah pantulan pertama. Misalkan

a ketinggian awal bola dan misalkan *t* tinggi pantulan maka tinggi pantulan bola dapat diberikan pada tabel berikut.

Tabel 6.6 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke ...	0	1	2	3	...
Tinggi pantulan (m)	3	12/5	48/25	192/125	...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

- *Arahkan siswa untuk mengisi tabel pada pantulan berikutnya.*
- *Pandu siswa untuk mengambil kesimpulan dari pengamatan terhadap tabel diatas jika pantulan terjadi terus.*

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$S = u_1 + 2\ (u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10})$

$\Leftrightarrow S = 2\ (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10}) - u_1$

$\Leftrightarrow S = 2s_{10} - u_1$

dimana

Tabel 6.7 Deret Pantulan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
S_1	u_1	3
S_2	$u_1 + u_2$	$3 + \frac{12}{5} = 3(\frac{9}{5}) = 3(\frac{25-16}{5})$
S_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$3 + \frac{12}{5} + \frac{48}{25} = 3(\frac{61}{25}) = 3(\frac{125-64}{25})$
S_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$3 + \frac{12}{5} + \frac{48}{25} + \frac{192}{125} = 3(\frac{369}{125}) = 3(\frac{625-256}{125})$
...	...	...
S_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 ... + u_n$	$s_n = 3(\frac{5^n - 4^n}{5^{n-1}})$

Berdasarkan Tabel 6.7 deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, $s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ yaitu $3(\frac{5^1 - 4^1}{5^0}), 3(\frac{5^2 - 4^2}{5^1}), 3(\frac{5^3 - 4^3}{5^2}), ..., 3(\frac{5^n - 4^n}{5^{n-1}})$.

Sehingga $s_{10} = 3(\frac{5^{10} - 4^{10}}{5^9})$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah $S = 2s_{10} - u_1$ atau
$S = 6(\frac{5^{10} - 4^{10}}{5^9}) - 3$

- *Arahkan siswa mengerjakan terlebih dahulu.*

Definisi 6.4

Deret geometri adalah barisan jumlah n suku pertama barisan geometri.
Bentuk umum:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

atau

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

dengan $u_1 = a$, dan r adalah rasio.

Sifat-4

Jika suatu deret geometri suku pertama adalah $u_1 = a$, dan rasio $= r$, maka jumlah n suku pertama adalah

i. $s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, untuk $r < 1$.

ii. $s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$, untuk $r > 1$.

iii. $s_n = na$, untuk $r = 1$.

Bukti:

i. $s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ .... (1)

Dengan mengalihkan kedua ruas persamaan 1 dengan r, didapatkan Persamaan 2 berikut.

$r_{sn} = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ .... (2)

Sekarang, selisih persamaan (1) dengan (2), diperoleh

$s_n - r_{sn} = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n)$

$s_n(1 - r) = a - ar^n$

$s_n = s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1.$$

ii. Untuk membuktikan prinsip ini, diserahkan kepada siswa.

Contoh 6.10

Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut ini!

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Penyelesaian

Pertama harus ditentukan rasio deret bilangan tersebut.

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{4}.$$

Karena $r < 1$, maka jumlah 10 suku pertama ditentukan melalui rumus,

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Akibatnya, $$s_{10} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{1\frac{1}{4}} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right).$$

Pertanyaan Kritis

Perhatikan pola barisan bilangan berikut!

a) 1, 3, 7, 9, …
b) 1, 4, 9, 16, …
c) 3, 1, 4, 2, 5, …

Tentukanlah suku ke-10 dari pola barisan di atas!
Apakah barisan tersebut termasuk barisan aritmetika atau barisan geometri?

Uji Kompetensi 6.2

1. Untuk memeriksa sebuah barisan merupakan barisan geometri apakah cukup hanya dengan menentukan rasio dua suku berturutan? Jelaskan dengan menggunakan contoh!

2. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!

3. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Tentukan Hasil kali dari ketiga bilangan tersebut!

4. Suku-suku barisan geometri tak hingga adalah positif, jumlah $u_1 + u_2 = 60$, dan $u_3 + u_4 = 15$, tentukan jumlah suku barisan itu!

5. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 8m dan memantul kembali de ngan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Berapakah jarak lintasan seluruhnya?

6. Jika jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 72 dan jumlah semua sukunya yang berindeks ganjil adalah 48, tentukan suku ke-3 deret tersebut!

7. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2.5%?

8. Pertumbuhan ekonomi biasanya dalam persen. Misalnya, pertumbuhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami pertumbuhan sebesar 6.5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB tahun ini PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.

9. Jika barisan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n^3$, untuk semua n bilangan asli, maka x_{100} = ...

10. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp200.000,00 per gram, tentukan harga sabun tersebut empat tahun lagi.

Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret geometri dalam bidang fisika, teknologi informasi dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret geometri di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret, disajikan sebagai berikut.

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan rangenya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki beda dua suku berurutan selalu tetap.
3. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku barisan aritmetika.
4. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.
5. Deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan geometri.
6. Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan fibbonaci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan dan deret.

Selanjutnya kita akan membahas materi persamaan dan fungsi kuadrat. Tentu kamu wajib mengulangi mempelajari materi persamaan linear, relasi dan fungsi, sebab materi tersebut adalah prasyarat utama mempelajari persamaan dan fungsi kuadrat.

Bab 7 Persamaan dan Fungsi Kuadrat

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran persamaan siswa mampu:

1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari;
2. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya;
3. menganalisis persamaan kuadrat dalam berbagai bentuk penyajian masalah kontekstual;
4. Memahami konsep dan prinsip persamaan dan fungsi kuadrat serta menggambarkan grafiknya dalam sistem koordinat;
5. memahami berbagai bentuk ekspresi yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat dan mengidentifikasi sifat-sifatnya;
6. menganalisis persamaan kuadrat dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat;
7. memahami persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan masalah nyata serta memeriksa kebenaran jawabannya;
8. menganalisis grafik fungsi dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa fungsi kuadrat.

Istilah Penting

- *Persamaan Kuadrat*
- *Peubah*
- *Koefisien*
- *Konstanta*
- *Akar-akar Persamaan*
- *Fungsi kuadrat*
- *Parabola*
- *Sumbu Simetri*
- *Titik Puncak*
- *Nilai Maksimum dan Minimum*

Pengalaman Belajar

Melalui pembelajaran materi fungsi kuadrat, siswa memperoleh pengalaman belajar:

- menjelaskan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait dengan model matematika sebagai persamaan kuadrat;
- merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat;
- menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan;
- menafsirkan hasil pemecahan masalah;
- menuliskan ciri-ciri persamaan dan fungsi kuadrat. dari beberapa model matematika;
- menuliskan konsep persamaan dan fungsi kuadrat. berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri;
- menurunkan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat berdasarkan konsep yang sudah dimiliki;
- menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan pemfaktoran, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus *abc*;
- menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat;
- menyusun persamaan kuadrat yang akar-akarnya memenuhi kondisi tertentu;
- menggunakan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk memecahkan masalah otentik;
- menentukan persamaan sumbu simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat;
- menggambarkan grafik fungsi kuadrat;
- menentukan fungsi kuadrat, jika diberi tiga titik yang tidak segaris;
- menjelaskan kaitan fungsi kuadrat dan persamaan kuadrat;
- menggunakan konsep dan prinsip fungsi kuadrat untuk memecahkan masalah otentik dan soal-soal.

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. PERSAMAAN KUADRAT

a. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Peubah

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang pemecahannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip persamaan kuadrat, sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep persamaan kuadrat dapat dibangun/ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD, SMP, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, kamu bisa pada kesepakatan antara kamu dan teman-teman serta guru, saling terkait materinya, menggunakan variabel-variabel, bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi atau tidak boleh ada di dalamnya, unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, dan rumus-rumus yang saling bertentangan. Alat ukur kebenarannya, jika konsep yang ditemukan, ukuran kebenarannya apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Jika prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

- *Untuk menemukan konsep persamaan kuadrat, ajukan pada siswa masalah-1, 2, 3, dan 4 secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Biarkan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi, mencari Pemecahan masalah di dalam kelompok belajar. Dari beberapa model matematika berupa persamaan kuadrat, minta siswa secara individu menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat dan hasilnya didiskusikan dengan teman satu kelompok. Berdasarkan ciri-ciri tersebut minta siswa menuliskan konsep persamaan kuadrat dengan kata-katanya sendiri.*

Masalah-7.1

Arsitek Ferdinand Silaban merancang sebuah rumah adat Batak di daerah Tuk-tuk di tepi Danau Toba. Ia menginginkan luas penampang atap bagian depan 12 m^2. Di dalam penampang dibentuk sebuah persegi panjang tempat ornamen (ukiran) Batak dengan ukuran lebar 2 m dan tingginya 3 m. Bantulah Pak Silaban menentukan panjang alas penampang atap dan tinggi atap bagian depan!

Gambar 7.1 Rumah Adat

- *Arahkan siswa memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar serta memperhatikan bentuk asli rumah adat Batak pada Gambar 7.1.*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

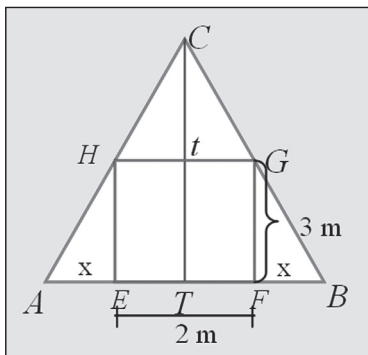
Luas penampang atap bagian depan 12 m^2

Ukuran persegi panjang tempat ornamen adalah 3 m × 2 m

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap

b. Tinggi atap

Kamu ilustrasikan masalah di atas seperti gambar berikut!

Gambar 7.2 Penampang Atap Bagian atas

- Memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut.

Kamu cermati segitiga sama kaki ABC dan lakukan hal berikut.
Misalkan panjang $AE = FB = x$ m.
Karena penampang atap rumah berbentuk segitiga sama kaki, maka

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{panjang alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (AE + EF + FB) \times t$$

$$12 = \frac{1}{2} t(x + 2 + x)$$

$$12 = t(1 + x) \quad \text{.......................................} (1)$$

- *Ingatkan kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan sebangun dan menyuruh siswa memperhatikan segitiga CTB dan segitiga GFB. Kedua segitiga tersebut sebangun. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Perhatikan segitiga CTB dan segitiga GFB. Kedua segitiga tersebut sebangun.

$$\frac{GT}{GF} = \frac{TB}{FB} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1+x}{x}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3+3x}{x} \quad \text{.......................................} (2)$$

- *Mengarahkan siswa memanfaatkan persamaan (a) dan (b) untuk memperoleh model matematika berupa persamaan kuadrat. Diharapkan siswa melakukan hal berikut, dari persamaan (a) dan (b) diperoleh*

Subtitusikan persamaan 2) ke persamaan 1) sehingga diperoleh

$$12 = \left(\frac{3+3x}{x}\right)(1 + x) \Leftrightarrow 12x = (3 + 3x)(1 + x)$$

$$\Rightarrow 12x = 3 + 3x + 3x + 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 12x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{.......................................} (3)$$

- *Meminta siswa mengingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x dengan melakukan manipulasi aljabar pada pers (1). Berdasarkan persamaan (1) akan ditentukan nilai-nilai x.*

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 = 0 &\Rightarrow x^2 - x - x + 1 = 0 \\
&\Rightarrow x(x-1) - 1(x-1) = 0 \\
&\Rightarrow (x-1)(x-1) = 0 \\
&\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \\
&\Rightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

- Apa makna dari $a \times b = 0$ dan apa kaitannya dengan $(x-1)(x-1) = 0$

Dengan menggunakan nilai x akan ditentukan nilai t.

Untuk $x = 1$ diperoleh $t = \dfrac{3-3x}{x} = 6$.

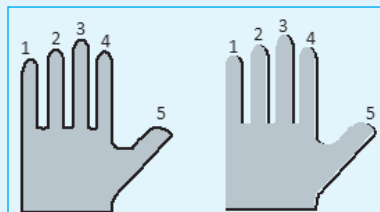
Sehingga diperoleh panjang alas dan tinggi penampang atap rumah adalah 4 m dan 6 m.

Sering kita temui orang tua yang sudah lanjut usia, mampu menghitung harga telur (banyak telur, cukup banyak) tanpa menggunakan kalkulator dengan waktu cukup singkat. Sementara orang tua tersebut tidak pernah menduduki jenjang pendidikan. Ternyata mereka memiliki warisan dari leluhur cara menjumlahkan dan mengalikan bilangan. Agar kamu mengetahuinya, gunakan jari tanganmu dan pecahkan Masalah 7.2 berikut.

Masalah-7.2

Nenek moyang salah satu suku di Indonesia dalam melakukan operasi hitung penjumlahan dan perkalian mereka menggunakan basis lima dengan fakta bahwa banyak jari tangan kiri atau kanan adalah lima. Coba bantu temukan aturan perkalian untuk menentukan hasil kali bilangan x dan y dengan

a. $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$

b. $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$

Gambar 7.3 Jari Tangan

♦ *Arahkan siswa untuk mencoba menentukan hasil kali bilangan 6 dan 8 sebelum menemukan prosedur yang berlaku secara umum. Selanjutnya siswa diharapkan melakukan langkah-langkah berikut.*

Sebelum menemukan aturan perkalian bilangan-bilangan yang dibatasi pada bagian a) dan b), coba pilih dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$ (misalnya, 6×8). Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan 6 di jari tangan kiri dan bilangan 8 di jari tangan kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan x di tangan kiri, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
2) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan y di tangan kanan, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
3) Berapa jumlah banyak jari yang terpakai pada tangan kiri dan banyak jari yang terpakai pada tangan kanan pada saat pencacahan kedua kali?
4) Berapa hasil kali jumlah jari yang terpakai di tangan kiri dan jari di tangan kanan dengan hasil pada langkah 3)?
5) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri saat pencacahan kedua kali ?
6) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan saat pencacahan kedua kali?
7) Berapa hasil kali bilangan pada langkah 5) dan 6)?
8) Berapa hasil jumlah bilangan pada langkah 4) dan 7)

Berdasarkan 8 langkah penentuan hasil perkalian bilangan x dan y, bekerjasama dengan temanmu satu kelompok untuk menemukan aturan perkalian dua buah bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: z adalah bilangan basis (dalam contoh = 5)

$x = z + a,\ \ a < z$

$y = z + b,\ \ b < z$

1. hitung $(a + b)$
2. hitung $(z + z) = 2z$
3. kalikan hasil langkah 1) dan 2), yaitu $(a + b)\ 2z$
4. hitung $(z - a)$
5. hitung $(z - b)$
6. kalikan hasil langkah 4) dan 5), yaitu $(z - a)\ (z - b)$
7. jumlahkan hasil langkah 3) dan 6), yaitu $(a + b)\ 2z + (z - a)\ (z - b)$
8. diperoleh $x \times y = (a + b)\ 2z + (z - a)\ (z - b)$, $5 < x, y < 10$, $x, y \in$ N

Untuk contoh di atas diperoleh

$6 \times 8 = (a + b)\, 2z + (z - a)(z - b)$

$48 = 8z + (z - 1)\,(z - 3)$

$\therefore\;\; z^2 + 4z - 45 = 0$ .... (1)

Latihan 7.1

Cermati aturan perkalian pada bagian a) dan mencoba menemukan aturan perkalian bilangan pada bagian b). Awali kerja kamu dengan memilih dua bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$. Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan x di jari tangan kiri dan bilangan y di jari tangan kanan.

Masalah-7.3

Pak Anas memiliki tambak ikan mas di hulu sungai yang berada di belakang rumahnya. Setiap pagi, ia pergi ke tambak tersebut naik perahu melalui sungai yang berada di belakang rumahnya. Dengan perahu memerlukan waktu 1 jam lebih lama menuju tambak dari pada pulangnya. Jika laju air sungai 4 km/jam dan jarak tambak dari rumah 6 km, berapa laju perahu dalam air yang tenang?

Gambar 7.4 Sungai

Ilustrasi masalah dapat dicermati pada gambar berikut.

Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kecepatan perahu saat menuju hulu sungai dan kecepatan perahu saat Pak Anas pulang?
2) Jika diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai ditujuan, apa yang dapat kamu simpulkan dari keadaan perahu?
3) Coba temukan bentuk perasamaan kuadrat dalam langkah pemecahan masalah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan V_a adalah kecepatan air sungai dengan $V_a = 4$ km/jam
V_{hu} adalah kecepatan perahu kehulu
V_{hi} adalah kecepatan perahu saat pulang
V_t adalah kecepatan perahu dalam air tenang
t_1 adalah waktu yang diperlukan menuju Tambak
t_2 adalah waktu yang digunakan menuju rumah (pulang)
S adalah jarak tambak dari rumah Pak Anas

Bagaimana kecepatan perahu saat pergi kehulu dan saat menuju hilir (pulang)?
Kecepatan perahu saat menuju hulu sungai menentang kecepatan air dan saat Pak Anas pulang, kecepatan perahu searah dengan kecepatan air sungai mengalir. Sehingga, Jika dimisalkan $V_{at} = x$ km/jam maka
$V_{hu} = x - 4$ dan $V_{hi} = x + 4$
Diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan berarti,

$x \neq -4$ dan $x \neq 4$.

$$t_1 - t_2 = \frac{S}{V_{hu}} - \frac{S}{V_{hi}} = 1$$

$$\frac{6}{x - 4} - \frac{6}{x + 4} = 1$$

$$6(x + 4) - 6(x - 4) = (x + 4)(x - 4)$$

$$6x + 24 - 6x + 24 = x^2 + 4x - 4x - 16$$

$$48 = x^2 - 16$$

$$\therefore x^2 - 64 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x^2 - 64 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x - 8 = 0 \text{ atau } x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ atau } x = -8$$

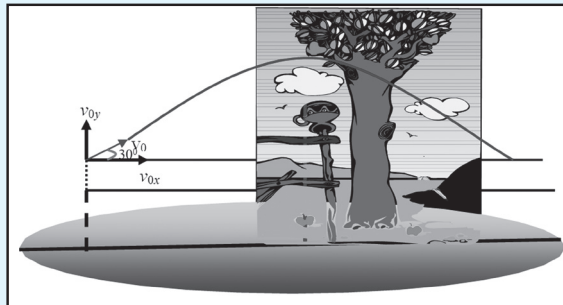
Kecepatan perahu di air tenang adalah $V_{at} = x = 8$ km/jam.
Nilai $x = -8$ tidak berlaku sebab kecepatan perahu bergerak maju selalu bernilai positif.

Kejadian dalam Masalah 7.4 yang akan dibahas, sering dialami oleh penggembala kerbau di tengah padang rumput yang penuh dengan pepohonan. Tentu kamu mengenal

ketapel yang sering digunakan para petani untuk mengusir burung dikala padi sedang menguning. Mari kita temukan sebuah model matematika berupa persamaan kuadrat dari permasalahan berikut.

- *Arahkan siswa memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Masalah-7.4

Ronald anak Pak Sulaiman sedang asyik menunggang kerbau. Tiba-tiba ia melihat seekor burung pengganggu tanaman yang berada di pohon dengan ketinggian 8m dari tanah. Ronald mengarahkan ketapelnya dengan sudut 30°, untuk mengusir burung tersebut ternyata batu ketapel mengenai burung saat batu mencapai ketinggian maksimum. Berapa kecepatan batu bergerak? (gravitasi bumi = 10 m/det²).
Ilustrasi masalah, dapat kamu cermati pada gambar di bawah ini.

Gambar 7.5 Posisi Burung di Pohon

Coba jelaskan pada temanmu pernyataan berikut.
Pada Sumbu-x, batu bergerak lurus beraturan, apa artinya?
Pada Sumbu-y, batu bergerak lurus berubah beraturan, apa artinya?
Renungkan beberapa pertanyaan berikut, agar kamu lebih mudah memecahkan masalah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: h_{maks} = 8 m dan $\alpha = 30^o$
$V_{ox} = V_o \cos \alpha$; $V_{oy} = V_o \sin \alpha$
Pada Sumbu-x, batu bergerak lurus beraturan
Pada Sumbu-y, batu bergerak lurus berubah beraturan
Saat batu mencapai ketinggian maksimum dan mengenai burung, $V_{yP} = 0$

$$V_{yP} = V_{0y} - gt \Rightarrow 0 = V_{0y} - gt$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_{0y}}{g}$$

$$\Rightarrow t_{oP} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

- Apa yang dimaksud ketinggian maksimum yang dicapai anak ketapel. Bagaimana kecepatan anak ketapel saat mencapai ketinggian maksimum

$$h_{max} = V_{0y}\, t_{oP} - \frac{1}{2} g t_{oP}^2$$

$$= V_0 \sin\alpha \frac{V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g}$$

Untuk $h_{max} = 8$ m, $\alpha = 30^0$, dan $g = 10$ m/det^2 diperoleh

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}\frac{(V_0 \sin 30^0)^2}{10}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{4}V_0^2\right)}{10}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{80}V_0^2$$

$$\therefore\ V_0^2 - 640 = 0 \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

$$V_0^2 - 640 = 0 \Rightarrow (V_0 + \sqrt{640})(V_0 - \sqrt{640}) = 0$$

$$\Rightarrow (V_0 + \sqrt{640}) = 0 \text{ atau } (V_0 - \sqrt{640}) = 0$$

$$\Rightarrow V_0 = -\sqrt{640} \text{ atau } V_0 = \sqrt{640}$$

$$\Rightarrow V_0 = -8\sqrt{10} \text{ atau } V_0 = 8\sqrt{10}$$

Jadi kecepatan batu (anak) ketapel meluncur adalah $V_0 = 8\sqrt{10}$ m/det.

- Bagaimana untuk $V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det, apakah berlaku?

$V_0 = -8\sqrt{10}$ m/det tidak berlaku sebab kecepatan anak ketapel bergerak arah ke atas (positif).

- ♦ *Suruh siswa menemukan persamaan kuadrat pada langkah Pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4, berdasarkan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya di SMP, diharapkan siswa menemukan beberapa persamaan kuadrat berikut.*

- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $z^2 + 4z - 45 = 0$
- $3z^2 + 2z - 85 = 0$
- $x^2 - 64 = 0$
- $v_0^2 - 640 = 0$

- ♦ *Suruh siswa untuk menuliskan ciri-ciri dari persamaan kuadrat secara individual dan mendiskusikannya dengan teman secara klasikal. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri perasamaan kuadrat sebagai berikut.*

Ciri-ciri persamaan kuadrat.

- Sebuah persamaan
- Pangkat tertinggi peubahnya adalah 2 dan pangkat terendah adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2, tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

Berdasarkan ciri-ciri persamaan kuadrat di atas, coba kamu tuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katamu sendiri dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan didefinisi berikut.

Definisi 7.1

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b,$ dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan

Contoh 7.1

Persamaan $2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat sebab persamaan $2x + 5 = 0$ dapat dibentuk menjadi persamaan $0x^2 + 2x + 5 = 0$, tetapi koefisien x^2 adalah nol. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $2x + 5 = 0$ tidak memenuhi syarat Definisi 7.1, sebab koefisien x^2 adalah 0. Persamaan $2x + 5 = 0$ adalah persamaan linear satu peubah.

Contoh 7.2

Sebuah bola bergerak dari ketinggian h m. Ketinggian bola dari tanah untuk setiap detiknya ditentukan fungsi waktu $h(t) = 20t - 5t^2$. Saat bola tiba di atas tanah, apa yang kamu temukan?

Penyelesaian

Saat bola tiba di atas tanah, $h(t) = 0$.
$h(t) = 0 \Rightarrow h(t) = 20t - 5t^2 = 0$.
Persamaan $20t - 5t^2 = 0$ termasuk persamaan kuadrat sebab persamaan $20t - 5t^2 = 0$ dapat ditulis menjadi $-5t^2 + 20t + 0 = 0$, dengan koefisien $a = -5 \neq 0$, $b = 20$ dan $c = 0$. Berdasarkan Definisi 7.1 persamaan $20t - 5t^2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan satu variabel, yaitu t.

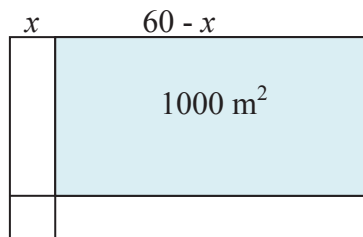
Contoh 7.3

Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat satu peubah sebab persamaan tersebut memuat dua peubah, yaitu x dan y.

Latihan 7.2

Di depan sebuah sekolah akan dibangun lapangan bola basket. Tanah kosong yang tersedia berukuran 60 m × 30 m. Karena dana terbatas, maka luas lapangan yang direncanakan adalah 1000 m^2. Untuk memperoleh luas yang diinginkan, ukuran panjang tanah dikurangi x m dan ukuran lebar dikurangi x m. Dapatkah kamu menemukan sebuah persamaan kuadrat dari masalah ini?

Penyelesaian

Gambaran tanah dan penampang lintang lapangan bola basket dapat digambarkan sebagai berikut.

Luas lapangan basket adalah 1.000 m^2. Karena lapangan basket berbentuk persegi panjang maka luas lapangan basket dapat dinyatakan dalam x, yaitu

$L = 1000$ dan $L = (60 - x)(30 - x)$ $\Rightarrow 1.000 = (60 - x)(30 - x)$

$\Rightarrow 1.000 = 1.800 - 90x + x^2$

$\Rightarrow 0 = 800 - 90x + x^2$

Koefisien x^2 pada persamaan $0 = 800 - 90x + x^2$ adalah 1, koefisien x adalah -90 dan konstanta persamaan adalah 800. Berdasarkan Definisi 7.1 di atas, persamaan $0 = 800 - 90x + x^2$ adalah persamaan kuadrat dengan variabel x.

Uji Kompetensi 7.1

1. Apakah persamaan yang diberikan merupakan persamaan kuadrat? Berikan alasanmu!
   a. $x^2y = 0,\ y \in R, y \neq 0.$
   b. $x + \frac{1}{x} = 0,\ x \neq 0.$
2. Robert berangkat kesekolah mengenderai sepeda. Jarak sekolah dari rumahnya 12 km. Robert berangkat dengan kecepatan awal sepeda bergerak 7 km/jam. Karena Robert semakin lelah, kecepatan sepedanya mengalami perlambatan 2 km/jam. Berapa lama waktu yang digunakan Robert sampai di sekolah.
3. Pada sebuah kerucut lingkaran tegak diketahui bahwa: penambahan volume karena jari-jarinya bertambah sepanjang 24 cm sama dengan penambahan volume karena tingginya bertambah 24 cm. Jika tinggi semula kerucut 3 cm, berapakah jari-jari kerucut semula ?
4. Dua buah jenis printer komputer akan digunakan untuk mencetak satu set buku. Jenis printer pertama, $\frac{1}{x}$ jam lebih cepat dari jenis printer kedua untuk menyelesaikan cetakan satu set buku. Jika kedua jenis printer digunakan sekaligus, maka waktu yang digunakan untuk mencetak satu set buku adalah 4 jam. Berapa waktu yang dibutuhkan printer jenis kedua untuk mencetak satu set buku.
5. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah. . . .
6. Jika $a^3 + b^3 = 637$ dan $a + b = 13$, maka nilai dari $(a–b)^2$ adalah. . . .
7. Bentuk faktorisasi dari : $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$ adalah. . .
8. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2$$

Projek

Rancanglah minimal dua masalah nyata di lingkungan sekitarmu yang terkait dengan persamaan kuadrat dan berilah penyelesaian kedua masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

b. Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara (aturan) menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut seluruhnya diturunkan dari konsep (Definisi-7.1) yang telah kita temukan. Aturan tersebut antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus ABC. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat. Agar lebih terarah pembahasan kita, mari kita coba memecahkan masalah-masalah yang diberikan.

1) Cara Pemfaktoran

Temukan pola atau aturan memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan menemukan rumus *ABC* berdasarkan konsep persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akarnya (harga-harga x yang memenuhi persamaan).

- *Meminta siswa membuat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyak lipatan kertas dan banyak bidang kertas yang terbentuk. Diharapkan siswa menuliskan hal berikut.*

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Nilai-nilai x dapat kita tentukan dengan cara pemfaktoran. Cara pemfaktoran dapat kita lakukan dengan memperhatikan koefisien x^2, x, dan konstanta c.

- Jika $a = 1$

$a = 1 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow x^2 + bx + c = 0$ .... (1)

Perhatikan bentuk $(x + m)(x + n) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + nx) + (mx + m \times n) = 0$

$\Rightarrow x^2 + (m + n)x + m \times n = 0$ .... (2)

Berdasarkan Persamaan-1 dan 2 diperoleh

$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m \times n = 0$

Menggunakan sifat persamaan, maka diperoleh $m + n = b$ dan $m \times n = c$.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = 0$, untuk $a = 1$, $m + n = b$ dan $m \times n = c$.

Nilai-nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = 0$ adalah $x = -m$ atau $x = -n$.

Perhatikan persamaan kuadrat yang kita peroleh dari beberapa permasalahan di atas yang memiliki koefisien x^2, $a = 1$, kita telah menerapkan cara pemfaktoran ini.

- Jika $a < 1$ atau $a > 1$

Berdasarkan Definisi-7.1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Perhatikan bentuk $\frac{1}{a}((ax + m)(ax + n)) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}((ax + n)ax + m(ax + n)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}((a^2x^2 + anx) + (amx + m \times n)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}(a^2x^2 + a(m + n)x + m \times n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Berdasarkan Persamaan-1 dan 2 diperoleh,

$$\frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac) = \frac{1}{a}(a^2x^2 + a(m + n)x + m \times n) = 0$$

Menggunakan sifat persamaan maka diperoleh $m + n = b$ dan $m \times n = ac$.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n) = 0$, untuk $a \neq 1$, $m + n = b$ dan $m \times n = ac$.

Nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n) = 0$ adalah $x = -\frac{m}{a}$ atau $x = -\frac{n}{a}$.

Perhatikan masalah-2 bagian b, kita telah peroleh persamaan kuadrat $3z^2 + 2z - 85 = 0$. Untuk menentukan harga z yang memenuhi sebagai berikut.

$$3z^2 + 2z - 85 = \frac{1}{3}(9z^2 + 6z - 255) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(9z^2 + 3(17 - 15)z + (17 \times (-15)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((9z^2 + 51z) - (45z + 255)) = 0$$

$m = 17$
$n = -15$
$m + n = 2 = b$
$m \times n = -255 = ac$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((3z + 17)3z - 15(3z + 17)) = 0$$

$$\Rightarrow (3z + 17)(3z - 15) = 0 \text{ atau } (3z + 17)(z - 5) = 0$$

Nilai-nilai z yang memenuhi adalah $z = \frac{-17}{3}$ atau $z = 5$ atau himpunan penyelesaian persamaan $3z^2 + 2z - 85 = 0$ adalah $Hp = \left\{\frac{-17}{3}, 5\right\}$.

2) Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna

- *Minta siswa menemukan pola, bagaimana cara melengkapkan sebuah persamaan kuadrat untuk menentukan nilai-nilai x yang memenuhi dan tanyakan apa kelemahan cara tersebut. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.*

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Untuk $a = 1$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$\Rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}, \text{ jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}, \text{ jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

3) Menggunakan Rumus *ABC*

- *Minta siswa menemukan rumus abc, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan dengan rumus abc. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.*

Berdasarkan Definisi-7.1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\text{x} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Menyuruh siswa melakukan manipulasi aljabar, dengan mengingat sifat persamaan.

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sifat-1

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, maka akar-akar persamaan tersebut adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- *Suruh siswa mencermati nilai diskriminan dan menentukan sifat-sifat akar sebuah persamaan kuadrat. Diharapkan siswa dapat menemukan hal berikut.*

Sifat akar-akar persamaan kuadrat dapat ditinjau dari nilai diskriminan, yaitu $D = b^2 - 4ac$. Sifat akar-akar tersebut adalah.

1) Jika $D > 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar real yang berbeda. Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 \neq x_2$.
2) Jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar real yang sama (kembar). Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 \neq x_2$.

$$D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$\Rightarrow x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3) Jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar kompleks (tidak real) yang berbeda. Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 \neq x_2$.

c. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Hasil Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar sebuah persamaan kuadrat adalah bilangan-bilangan yang dapat dijumlahkan atau dikalikan. Bagaimana menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar dan kaitannya dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat tersebut? Untuk itu selesaikanlah masalah berikut.

Temukan aturan (rumus) menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat!

- *Mengarahkan siswa menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dengan memanfaatkan rumus ABC. Diharapkan siswa dapat melakukan hal berikut.*

Berdasarkan rumus *ABC* di atas, akar-akar persamaan kuadrat adalah sebagai berikut.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. Jumlah Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

b. Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Berdasarkan kedua rumus di atas, disimpulkan

Sifat-2

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dengan akar-akar x_1 dan x_2, maka diperoleh

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

d. Persamaan Kuadrat Dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Pada materi sebelumnya kita telah menemukan konsep persamaan kuadrat. Kemudian kita dapat menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut dengan aturan-aturan yang telah ditemukan. Sekarang bagaimana menemukan sebuah persamaan kuadrat, jika akar-akarnya diketahui ? Untuk itu pecahkanlah masalah berikut.

Sebuah persamaan kuadrat memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Temukanlah persamaan kuadrat yang dimaksud.

- *Mengarahkan siswa menemukan persamaan kuadrat, jika diketahui akar-akarnya dengan memanfaatkan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan yang diinginkan. Diharapkan siswa dapat melakukan hal berikut.*

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Berdasarkan definisi-1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

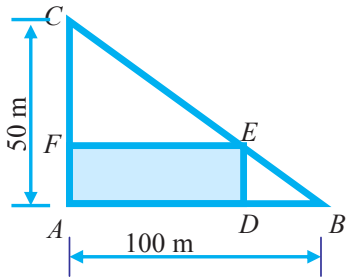
$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0$$
$$\Rightarrow (x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0$$
$$\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Sifat-3

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Uji Kompetensi 7.2

1. Persamaan $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real. Tentukan nilai m yang memenuhi!
2. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa
   a. $\alpha^4 + \beta^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
   b. $(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$
3. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah p dan q. Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(p + 2)$ dan $(q + 2)$!
4. Dua buah jenis mesin penggiling padi digunakan untuk menggiling satu peti padi. Untuk menggiling satu peti padi, mesin jenis pertama lebih cepat $\frac{1}{2}$ jam dari mesin jenis kedua. Sementara jika kedua mesin digunakan sekaligus, dapat menggiling satu peti padi selama 6 jam.
   a. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis pertama untuk menggiling satu peti padi.
   b. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis kedua untuk menggiling satu peti padi.
5. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, maka nilai terbesar yang mungkin dari $a^3 + 4a^2 + 9988$ adalah ....
6. Pada sebidang tanah akan didirikan sebuah sekolah SD. Bentuk tanah dan ukuran tanah dapat dilihat pada gambar.

7. $\frac{x}{x^2+3x+1} = a$, nilai dari $\frac{x^2}{x^4+3x^2+1} = \cdots$

8. Jika $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} + \sqrt{2009x^2 - 11x + 96} = 16$ maka nilai yang mungkin untuk $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} - \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$ adalah …

9. Hasil pemfaktoran dari : $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 16$ adalah ....

Projek

Himpunlah informasi penggunaan sifat-sifat dan aturan yang berlaku pada persamaan kuadrat di bidang ekonomi, fisika, dan teknik bangunan. Kamu dapat mencari informasi tersebut dengan menggunakan internet, buku-buku dan sumber lain yang relevan. Temukan berbagai masalah dan pemecahannya menggunakan aturan dan sifat-sifat akar persamaan kuadrat. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

2. FUNGSI KUADRAT

a. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu pada fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep fungsi kuadrat dapat ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

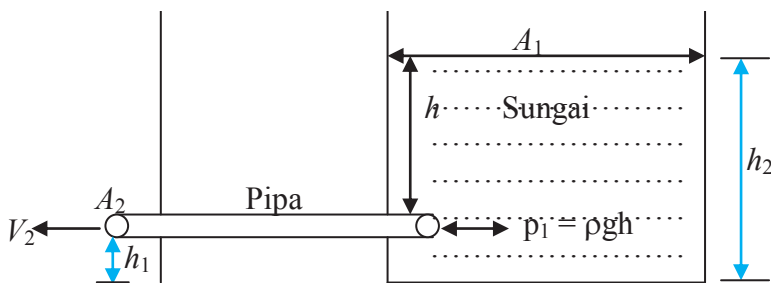
- *Untuk menemukan konsep fungsi kuadrat, ajukan pada siswa masalah-8, 9, dan 10 secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Berikan kesempatan pada siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi, mencari Pemecahan masalah di dalam kelompok. Dari beberapa model matematika berupa fungsi kuadrat, minta siswa secara individu maupun kelompok berdiskusi menuliskan ciri-ciri fungsi kuadrat dan berdasarkan ciri-ciri tersebut minta siswa menuliskan konsep fungsi kuadrat dengan kata-katanya sendiri.*

Masalah-7.5

Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya *s* dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah 10 m/det^2).

Gambar 7.6 Sumber Air Bersih

- *Arahkan siswa memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar.*

Alternatif Penyelesaian

Gambar 7.7 Ilustrasi Posisi Pipa di Dalam Sungai

Misalkan:

p_1 adalah tekanan air pada mulut pipa

p_2 adalah tekanan air pada ujung pipa

h adalah kedalaman pipa di bawah permukaan air sungai.

h_1 adalah ketinggian pipa dari permukaan tanah.

h_2 adalah ketinggian permukaan air sungai.
V_1 adalah kecepatan air sungai mengalir
V_2 adalah kecepatan air mengalir dari ujung pipa.
A_1 adalah penampang permukaan air sungai
A_2 adalah penampang permukaan ujung pipa

- *Membantu siswa mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilannya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan, struktur-struktur yang belum diketahui. Mengajak siswa menganalisis, apa yang terjadi jika A1 jauh lebih luas dari A2. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.*

Jika $A_1 >>> A_2$ maka $V_1 <<< V_2$, akibatnya V_1 menuju 0 (nol).
Karena tekanan air pada pangkal pipa dan diujung pipa sama maka berdasarkan gambar di atas diperoleh persamaan

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{(karena } V_1^2 \text{ menuju nol)}$$

$$gh = \frac{1}{2} V_2^2 \quad \text{(karena } h = h_1 - h_2\text{)}$$

$$2gh = V_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gh}$$

$\therefore$ Kecepatan air mengalir dari pipa adalah $V = \sqrt{2gh}$

Debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah volume air yang mengalir persatuan waktu.

$$q = \frac{volume}{waktu}$$

$$= \frac{A \times S}{t}$$

$$= A \times V.$$

$q = (\frac{1}{4}\pi d^2)(\sqrt{2gh})$ (penampang pipa berbentuk lingkaran, luas penampang pipa adalah $A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$, d adalah diameter pipa)

Debit air yang mengalir dari pipa dinyatakan dalam fungsi berikut

$$\therefore\ q(d) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)d^2,\ d \in R,\ d \geq 0 \text{ .... (1)}$$

Kain tenun yang berasal dari Sumatera Barat atau yang lebih dikenal dengan songket Minangkabau merupakan suatu hasil karya tradional yang perlu dipertahankan. kekayaan motifnya ternyata juga memiliki arti dan nilai kebersamaan tersendiri. Adapun jenis-jenis motif dari kain songket Minangkababu tersebut diantaranya adalah motif Pucuk Rabuang, motif Itiak Pulang Patang, motif Kaluak Paku, dan yang lainnya. Motif Kaluak Paku misalnya memiliki makna bahwa kita sebagai manusia haruslah mawas diri sejak kecil, dan perlu belajar sejak dini mulai dari keluarga. Pendidikan dalam keluarga menjadi bekal utama untuk menjalankan kehidupan di masyarakat. Setelah dewasa kita harus bergaul ke tengah masyarakat, sehingga bekal hidup dari keluarga bisa menjadikan diri lebih kuat dan tidak mudah terpengaruh hal negatif. Selain itu juga, motif Kaluak Paku juga memiliki makna lainnya, yaitu seorang pemimpin harus mampu menjadi teladan bagi masyarakat yang ada disekitarnya. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Sekarang mari kita perhatikan salah satu jenis kain songket yaitu kain sonket motif Kaluak Paku, dalam hal ini kita jadikan bahan inspirasi mengangkat masalah matematika terkait fungsi kuadrat.

Masalah-7.6

Gambar 7.8 Kain Songket

Sebuah kain songket dengan ukuran panjang $\frac{9}{4}$ m dan lebar $\frac{3}{4}$ m. Di bagian tengah terdapat 5 bagian daerah yang luas seluruhnya $\frac{451}{400}$ m. Tentukan ukuran bagian kain songket yang berwarna merah dan daerah berambu benang.

- *Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga dapat terpecahkan.*

Cermatilah beberapa pertanyaan yang mengarahkan kamu bekerja lebih efektif.

1) Berbentuk apakah daerah bagian dalam kain songket. Bagaimana kamu menentukan luas daerah tersebut?
2) Apakah ada keterkaitan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk menentukan ukuran daerah bagian dalam kain songket?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan:

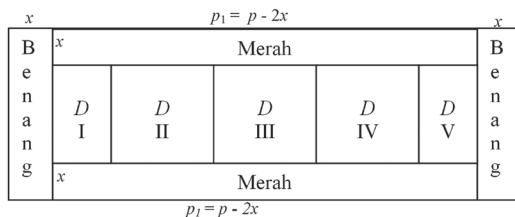
Panjang kain songket adalah $p = \frac{9}{4}$ m

Lebar kain songket adalah $= \frac{3}{4}$ m.

Lebar daerah berwarna merah dan berambu benang adalah x m.

Akibatnya panjang dan lebar daerah bagian dalam masing-masing $(p - 2x)$ m dan $(l - 2x)$ m

Secara keseluruhan, bagian-bagian kain songket dapat digambarkan sebagai berikut.

x	$p_1 = p - 2x$					x
Benang	x Merah					Benang
	D I	D II	D III	D IV	D V	
	x Merah					
	$p_1 = p - 2x$					

Karena daerah bagian dalam kain songket berbentuk persegi panjang, maka luas bagian dalam kain songket adalah

$$L_1 = (p - 2x)(1 - 2x)$$

$$L_1(x) = \left(\frac{9}{4} - 2x\right)\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$$

$$L_1(x) = \frac{27}{16} - \left(\frac{18}{4} + \frac{6}{4}\right)x + 4x^2$$

$$\therefore L_1(x) = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16},\ x \in R,\ x \geq 0 \quad \text{.......................................} \text{ (Pers. 1)}$$

> Menanyakan pada siswa, jika harga x berubah bagaimana nilai L_1 apakah ikut berubah?

Pada soal diketahui luas daerah bagian dalam kain songket $L_1(x) = \frac{451}{400}$ m^2, sehingga Persamaan-1 dapat dijadikan dalam bentuk persamaan kuadrat

$$L_1(x) = \frac{451}{400} \Rightarrow L_1(x) = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{451}{400} = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + \frac{675}{400} - \frac{451}{400} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + \frac{14}{25} = 0$$

$$\Rightarrow \left(2x - \frac{14}{5}\right)\left(2x - \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{5} \text{ atau } x = \frac{1}{10}$$

Ukuran panjang dan lebar daerah kain songket yang berwarna merah ditentukan sebagai berikut

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow p_1 = p - 2x = \frac{9}{4} - \frac{1}{5} = \frac{41}{20} \text{m}$$

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow l_1 = l - 2x = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} \text{m}$$

Ukuran panjang dan lebar daerah berambu benang adalah $\frac{3}{4}$ m $\times$ $\frac{1}{10}$ m.

Untuk harga $x = \frac{7}{5}$ tidak berlaku sebab menghasilkan panjang p1dan lebar l1 bernilai negatif.

Kenyataan hidup terkadang berbeda dengan apa yang kita harapkan. Seperti Pak Ketut yang memiliki ijazah Sarjana Pertanian, telah lama dan berulangkali melamar pekerjaan di kota Jakarta. Ternyata, ia belum beruntung memanfaatkan ijazahnya sampai saat ini. Akhirnya, ia kembali ke Pulau Dewata dan berencana membuat keramba ikan Gurami dan Udang. Tetapi, ia mendapat masalah sebagai berikut.

Masalah-7.7

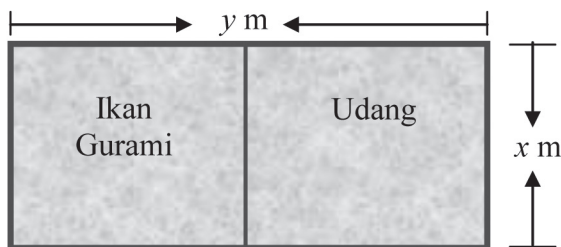
Pak Ketut memiliki jaring jala sepanjang 60 m. Ia ingin membuat keramba ikan gurami dan udang. Kedua keramba ikan dibuat berdampingan, seperti tampak pada gambar berikut.

Gambar 7.9 Keramba Ikan Gurami dan Udang

- *Arahkan siswa memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar dan memperhatikan Gambar-7.9 di buku siswa.*

Misalkan panjang keramba y m dan lebarnya x m, serta kelilingnya keramba k m. Tentukanlah ukuran keramba agar luasnya maksimum!

Alternatif Penyelesaian

Penampang permukaan keramba dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 7.10 Posisi Tambak

Karena panjang jaring jala yang tersedia adalah 60 m maka keliling keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$K = 2y + 3x = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \Rightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Luas keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

L = panjang × lebar

$L = y \times x$

$y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow L = y \times x \Rightarrow L = (30 - \frac{3}{2}x)x$

$\Rightarrow L = 30x - x^2$

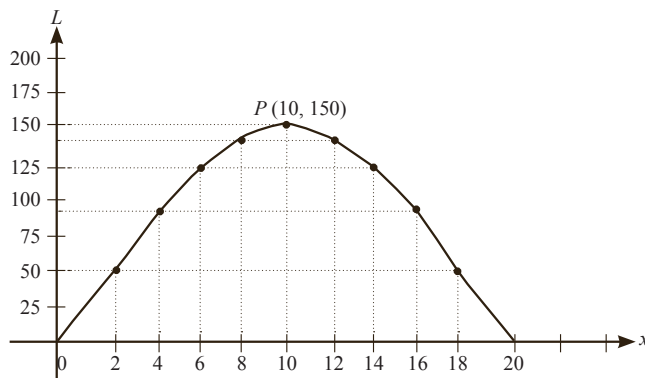
Karena luas permukaan keramba tergantung nilai x maka persamaan fungsi luas dapat dinyatakan sebagai berikut.

$\therefore L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2, x \in R, x \geq 0$

Dengan mengambil beberapa harga x, diperoleh beberapa harga L dan disajikan pada tabel berikut

Tabel 7.1 Nilai L dengan x merupakan bilangan bulat genap positif

Nilai x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nilai L	0	54	96	126	144	150	144	126	96	54	0

Sekarang mari kita gambarkan grafik fungsi $L(x) = 30x - x^2$ pada bidang koordinat dengan bantuan nilai-nilai x dan L yang ada pada tabel di atas.

Gambar 7.11 Grafik Fungsi Kuadrat

Coba cermati harga-harga x dan l di dalam Tabel 7.1 dan grafik fungsi

$l(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2, \; x \geq 0$ memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a) Kurva terbuka ke bawah
b) Grafik memotong sumbu-x pada dua titik yang berbeda yaitu titik (0, 0) dan titik (20, 0).

c) Grafik fungsi mencapai puncak pada titik (10, 150).

d) Garis $x = 10$ membagi dua luas (sama besar) daerah di bawah kurva, sehingga garis $x = 10$ dapat dikatakan sebagai sumbu simetri grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2$.

Berdasarkan grafik fungsi di atas, luas maksimum diperoleh saat lebar dan panjang permukaan keramba ikan, yaitu $x = 10$ m dan $y = 15$ m

$x = 10$ m dan $y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 15$ m

Luas maksimum permukaan keramba ikan adalah $L = 150$ m^2

- *Menyuruh siswa menemukan fungsi kuadrat pada langkah Pemecahan Masalah-8, 9, dan 10, berdasarkan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya di SMP. Diharapkan siswa menemukan beberapa fungsi kuadrat berikut.*

- $q(d) = \left(\frac{\sqrt{20}}{3}\pi\right)d^2, d \in R, d \geq 0.$
- $l_1(x) = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}, x \in R, x \geq 0.$
- $l(x) = 30x - \frac{3}{2}x_2, x \in R, x \geq 0.$

- *Menyuruh siswa untuk meuliskan ciri-ciri dari fungsi kuadrat secara individual dan hasilnya didiskusikan secara klasikal. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri fungsi kuadrat sebagai berikut.*

Ciri-ciri fungsi kuadrat.

- Sebuah fungsi
- Memuat sebuah variabel bebas atau peubah bebas
- Pangkat tertinggi variabel bebasnya adalah 2 dan pangkat terendahnya adalah 0
- Koefisien variabel bebas adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2 tidak sama dengan nol.
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

- *Berdasarkan ciri-ciri fungsi kuadrat di atas, suruh siswa menuliskan pengertian fungsi kuadrat dengan kata-katanya sendiri dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Dari hasil diskusi siswa secara klasikal ditetapkan.*

Definisi 7.2

Fungsi kuadrat dalam x adalah suatu fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

$f : A \rightarrow B$, dengan $f(x) = ax^2 + bx + c;\quad a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Dengan : x adalah variabel bebas atau peubah bebas
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan
$f(x)$ adalah nilai fungsi yang tergantung pada nilai variabel x.

- *Untuk lebih memahami konsep fungsi kuadrat di atas, ajukan beberapa contoh dan bukan contoh fungsi kuadrat yang ada pada buku siswa dan meminta siswa memberikan alasan mengapa fungsi yang diberikan merupakan fungsi kuadrat atau bukan fungsi kuadrat. Cermati pemahaman siswa dari alasan-alasan yang diberikan.*

Contoh 7.4

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi
$g : A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c$, $\forall\, x \in A$, $c \in B$, Apakah fungsi g merupakan fungsi kuadrat?

- Diharapkan siswa memberikan jawaban sebagai berikut.

Fungsi g bukan merupakan fungsi kuadrat sebab nilai fungsi g adalah konstanta c untuk setiap x anggota domain A. Fungsi g dapat dinyatakan,
$g(x) = c \Rightarrow g(x) = 0x^2 + 0x + c$. Berarti koefisien x^2 adalah 0. Hal ini tidak memenuhi syarat Definisi-7.2 di atas, bahwa $a \neq 0$. Fungsi g ini disebut juga fungsi konstan.

Contoh 7.5

Didefinisikan $h(t) = (t - 2)^2$, $t \in R$. Apakah fungsi h merupakan fungsi kuadrat?

- Diharapkan siswa memberikan jawaban sebagai berikut.

h merupakan fungsi kuadrat sebab
1) h merupakan suatu fungsi.

2) $h(t) = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 2$, $t \in R$. Pangkat tertinggi variabel t adalah 2.
3) Koefisien t^2 adalah a = $1 \neq 0$.

Contoh 7.6

Misalkan himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \in R\}$
$B = \{y \mid -8 \leq y < 20, y \in R\}$
Didefinisikan $f : A \to B$
$f : x \to x^3, \forall\, x \in A$
Apakah fungsi f merupakan fungsi kuadrat?

- Diharapkan siswa memberikan jawaban sebagai berikut.

Fungsi $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in A$, bukan merupakan fungsi kuadrat sebab pangkat tertinggi dari variabel x adalah 3.

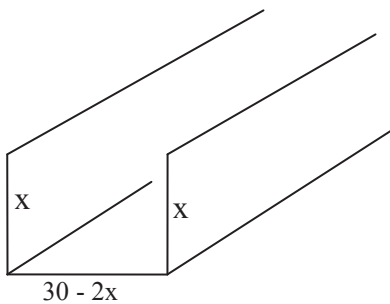
Contoh 7.7

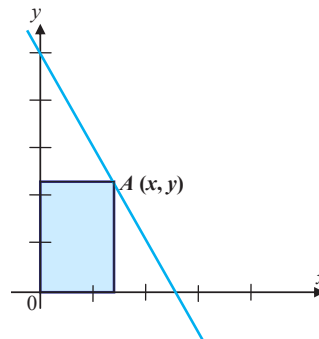
Misalkan himpunan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in R\}$ dan $B = \{y \mid 8 \leq y \leq 26, y \forall R\}$.
Didefinisikan $f : A \to B$, dengan $f(x) = x^2 + 3x + 8$, $\forall\, x \in A$.
Apakah fungsi f merupakan fungsi kuadrat?

- Diharapkan siswa memberikan jawaban sebagai berikut.

f merupakan fungsi kuadrat sebab
a) f merupakan fungsi dengan daerah asal (*domain*) f adalah $D_f = A$, dan daerah hasil (*range*) f adalah $R_f = B$.
b) Pangkat tertinggi variabel x adalah 2.
c) Koefisien x^2, x, dan konstantanya adalah $a = 1$, $b = 3$, dan $c = 8$.

Uji Kompetensi 7.3

1. Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat Talang Air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah Talang Air dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada Gambar.

Bantulah Pak Suradi menentukan ukuran x agar volume air yang tertampung maksimal.

2. Titik $A(x, y)$ terletak pada garis g dengan persamaan $2x + y = 10$. Dari titik A dibuat garis-garis tegak lurus terhadap Sumbu-x dan Sumbu-y sehingga terbentuk persegi panjang dengan diagonal OA. Perhatikan gambar berikut!

a) Jika L menyatakan luas daerah persegi panjang yang terbentuk, nyatakan lah L sebagai fungsi x.

b) Apakah L sebagai fungsi merupakan fungsi kuadrat dalam x?

Projek

Rancanglah permasalahan terkait gerakan peluru dan ekonomi yang menerapkan konsep dan aturan fungsi kuadrat. Buatlah pemecahan masalah tersebut dalam sebuah laporan serta sajikan di depan kelas.

2. Grafik Fungsi Kuadrat

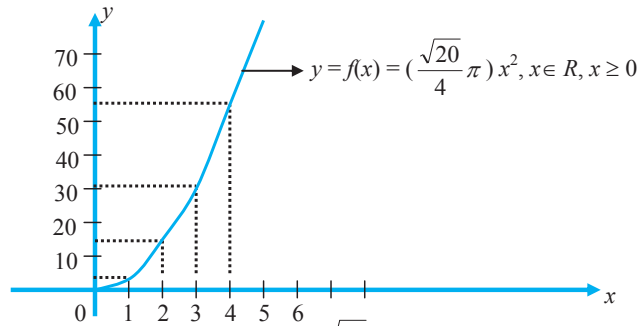
Dari hasil pemecahan Masalah 7.8, kita telah peroleh persamaan fungsi kuadrat yang menyatakan besar debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah $q(d) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) d^2,\ d \in R,\ d \geq 0$. Misalkan ukuran diameter pipa adalah x dan besar debit air yang mengalir adalah y. Berarti y dapat dinyatakan dalam x, yaitu $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2, x \in R, x \geq 0$.

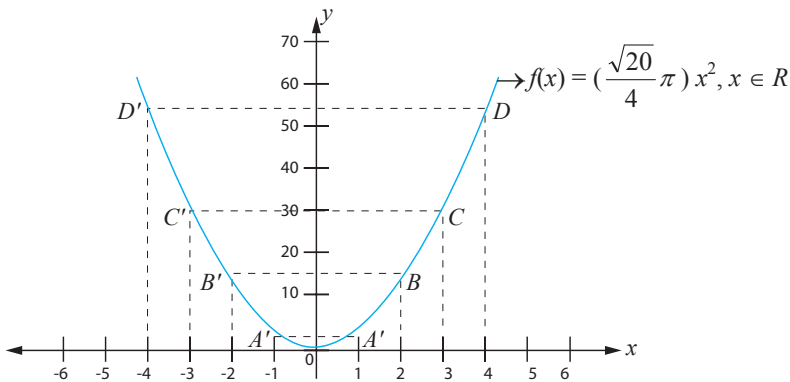
Temukan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}p\right) x^2, x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}p\right) x^2, x \in R, x \geq 0$.

- *Siswa diingatkan kembali, bagaimana menggambarkan grafik persamaan fungsi kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik persamaan fungsi kuadrat yang baru.*

Perhatikan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2, x \in R, x \geq 0$, yang menyatakan besarnya debit air yang mengalir dari pipa. Besarnya debit air yang mengalir dari pipa tergantung besarnya ukuran diameter (x) pipa. Jika $x = 0$, maka debit air adalah $y = f(x) = f(0) = 0$. Untuk beberapa nilai x diberikan, diperoleh nilai $y = f(x)$ disajikan dalam tabel berikut.

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	3,51	14,04	31,6	56,17

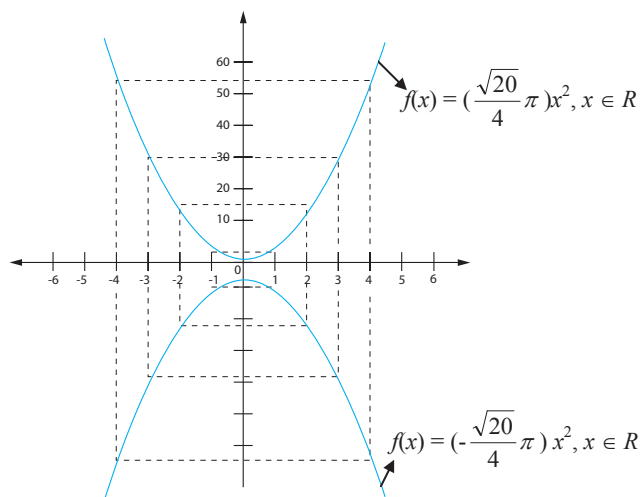
Grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right) x^2, x \in R, x \geq 0$ dapat digambarkan sebagai berikut.

Gambar 7.12: Grafik fungsi $= f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R, \quad x \geq 0.$

Dengan mencerminkan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ terhadap Sumbu-y, maka diperoleh sebuah parabola berikut.

Gambar 7.13: Grafik fungsi $(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R$ dan parabola di atas adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = \frac{\sqrt{20}}{4}\pi > 0$
- Kurva terbuka ke atas
- Memiliki titik puncak (titik balik minimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $x = 0$ dan nilai minimum $y = f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x pada titik $O(0, 0)$

- Meminta siswa mencerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ terhadap Sumbu-x dan menyelidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.

Kita cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ terhadap Sumbu-x atau garis $y = 0$. Dengan mengingat kembali sifat-sifat pencerminan bahwa arah benda dengan bayangannya selalu berlawanan arah. Sehingga nilai fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ berubah dari bernilai positif menjadi negatif. Perubahan tersebut diikuti perubahan fungsinya dari $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ menjadi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$. Secara lengkap bayangan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x)$ setelah dicerminkan terhadap Sumbu-x adalah sebagai berikut.

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)x^2, x \in R$ dan parabola hasil pencerminan terhadap sumbu-x (Gambar-7.14) adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = -\frac{\sqrt{20}}{4}\pi < 0$
- Kurva terbuka ke bawah
- Memiliki titik puncak (titik balik maksimum) di titik $O(0, 0)$

- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua daerah kurva sama besar, yaitu garis $y = 0$ dan nilai minimum $f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung Sumbu x pada titik $O(0, 0)$

♦ *Meminta siswa menyimpulkan hasil pencerminan grafik fungsi kuadrat di atas.*

Disimpulkan

Misalkan $g(x) = ax^2, x \in R$, jika dicerminkan terhadap Sumbu-x maka diperoleh $g^*(x) = -ax^2$, $x \in$ R dengan sumbu simetri adalah Sumbu-y dan memiliki titik puncak O (0, 0).

♦ *Mengajak siswa menemukan persamaan garis simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat dengan mengajukan Masalah-7.12 berikut.*

Masalah-7.8

Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan a ≠ 0.

a. Temukan persamaan garis simetri (sumbu simetri) dan titik puncak grafik fungsi kuadrat tersebut.
b. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, $a \neq 0$.
c. Temukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
d. Temukan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ terkait nilai koefisien a dan titik puncak parabola.

♦ *Diharapkan siswa melakukan hal berikut.*

Alternatif Penyelesaian

Berdasar Definisi 7.2, bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \ \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{-D}{4a}\right),\ a \neq 0$$

Misalkan $g(x) = ax^2, x \in R, a \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right),\ a \neq 0 \\ \text{dan } g(x) = ax^2,\ x \in R \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$$

Grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ adalah grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, yang digeser sejauh $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ satuan kearah Sumbu-x dan digeser sejauh $\left(\frac{-D}{4a}\right)$ satuan ke arah Sumbu-y.

- Meminta salah satu kelompok mendemonstrasikan di papan tulis, pergeseran grafik persamaan fungsi kuadrat $g(x) = ax^2, x \in R, a \neq 0$ menjadi grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ dan menyimpulkan arah pergeseran.

  Diharapkan siswa menyimpulkan hal berikut.

  Sesuai dengan sifat transformasi geser diperoleh arah pergeseran sebagai berikut.

a. Grafik persamaan fungsi $g(x) = ax^2, x \in R$ digeser dalam arah Sumbu-x positif untuk mendapatkan grafik persamaan fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ jika dan hanya jika $ab < 0$ (a dan b berlawanan tanda).

b. Grafik persamaan fungsi $g(x) = ax^2, x \in R$ digeser dalam arah Sumbu-x negatif untuk mendapatkan grafik persamaan fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ jika dan hanya jika $ab > 0$ (a dan b bertanda sama).

c. Grafik persamaan fungsi $g(x) = ax^2$, $x \in R$ digeser dalam arah Sumbu-y positif untuk mendapatkan grafik persamaan fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ jika dan hanya jika $\frac{-D}{4a} > 0$ (a dan b berlawanan tanda).

d. Grafik $g(x) = ax^2$, $x \in R$ digeser dalam arah Sumbu-y negatif untuk mendapatkan grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ jika dan hanya jika $\frac{-D}{4a} < 0$ (a dan b bertanda sama).

Meminta siswa menyimpulkan aturan menentukan persamaan garis sumbu simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat. Diharapkan siswa menyimpulkan sebagai berikut.

- *Meminta siswa menyimpulkan aturan menentukan persamaan garis sumbu simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat. Diharapkan siswa menyimpulkan sebagai berikut.*

Sifat-4

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, memiliki

a. Persamaan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan

b. Titik puncak $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

- Dari beberapa sajian grafik persamaan fungsi kuadrat sebelumnya turunkan sifat-sifat grafik persamaan fungsi kuadrat dan menyajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Dari fungsi kuadrat $f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right)$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat.

Sifat-5

Jika $a > 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-6

Jika $a < 0$, maka grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke bawah dan memiliki titik balik maksimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-7

Grafik persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Misal $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)

a. Jika $D > 0$ maka grafik $y = f(x)$ memotong Sumbu-x pada dua titik berbeda

b. Jika $D = 0$ maka grafik $y = f(x)$ menyinggung Sumbu-x pada satu titik

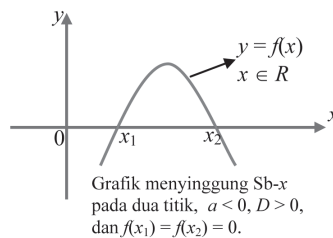
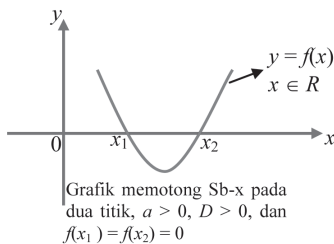
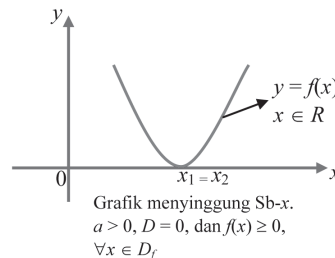
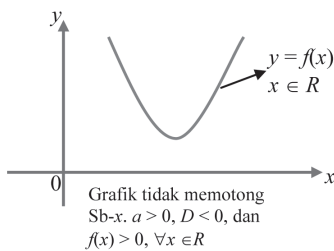
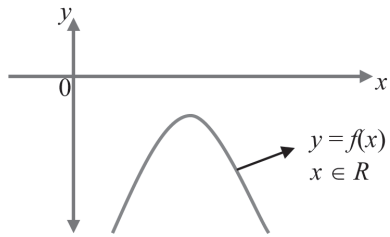
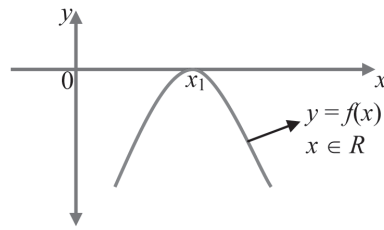
c. Jika $D < 0$ maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong Sumbu-x

Pada gambar berikut diperlihatkan berbagai kemungkinan letak parabola terhadap Sumbu-x.

Grafik tidak memotong Sb-x. $a > 0$, $D < 0$, dan $f(x) > 0$, $\forall x \in R$

Grafik menyinggung Sb-x. $a > 0$, $D = 0$, dan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D_f$

Grafik memotong Sb-x pada dua titik, $a > 0$, $D > 0$, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$

Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D > 0$, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Grafik tidak memotong Sb-x, $a < 0$, $D < 0$, dan $f(x) < 0$, $\forall x \in D_f$

Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D = 0$, dan $f(x) \leq 0$, $\forall x \in D_f$.

3. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

- *Meminta siswa mencermati kembali Definisi-1 dan Definisi-2, dan menemukan keterkaitan kedua konsep, serta menyatakan konsep yang satu dari konsep yang lain.*

Kita cermati konsep persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut.

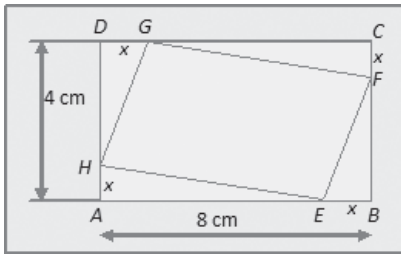
- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.
- Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Berdasarkan kedua konsep di atas jelas kelihatan bahwa pembuat nol fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, adalah nilai x yang jika disubtitusikan ke persamaan fungsi kuadrat tersebut mengakibatkan $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ inilah yang menjadikan $f(x) = 0$ dan titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ adalah titik-titik potong kurva fungsi kuadrat tersebut terhadap sumbu-x. Jadi persamaan kuadrat dapat diperoleh dari fungsi kuadrat dengan mengganti nilai fungsi f dengan suatu bilangan real.

Sifat-8

Jika sebuah fungsi kuadrat diberi nilai k, dengan $k \in R$ maka diperoleh sebuah persamaan kuadrat.

Uji Kompetensi 7.4

1. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum -3 pada saat x = 2, sedangkan untuk x = - 2 fungsi bernilai -11. Tentukan fungsi kuadrat tersebut !
2. Tentukan luas minimum segi empat *EFGH* di bawah ini !

3. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = 4x^2$!
4. Persegi *ABCD* dengan panjang sisinya a cm. Pada sisi *AB* diberi titik *E* dengan panjang *AE* adalah x cm. Diantara sisi *BC* diberi titik *F* dengan panjang $BF = AE$. Panjang $EB = FC$. Tentukan luas minimum *DEF* !
5. Daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ adalah himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in R$. Tentukan daerah hasil fungsi f !
6. Gambarkanlah grafik fungsi kuadrat di bawah ini.(untuk setiap x bilangan real)
   a. $f(x) = 3x^2+5x-4, x \in R.$
   b. $f(x) =-2x^2-3x+7, x \in R.$

Projek

Rancanglah masalah nyata yang melibatkan grafik fungsi kuadrat pada bidang teknik bangunan dan fisika. Buatlah pemecahan masalah tersebut dengan menerapkan berbagai sifat grafik fungsi kuadrat yang telah kamu pelajari. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Telah kita temukan konsep dan aturan yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Beberapa hal yang penting sebagai pegangan kita untuk mendalami dan melanjutkan materi pada bahasan berikutnya, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Bentuk umum Persamaan kuadrat adalah
   $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

2. Untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut.
   Memfaktorkan.
   Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.
   Menggunakan Rumus *abc.*
   Rumus untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat atau sering disebut dengan
   Rumus *abc* adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat
   Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, berhubungan erat dengan koefisien-koefisien *a, b,* dan *c.* Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Bentuk persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

5. Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat
   Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan $a, b, c \in$ R dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.
   a. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
   b. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
   c. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.
   d. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x.
   e. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.

6. Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx$ adalah sebagai berikut
   a. Menentukan titik potong dengan sumbu x, diperoleh jika $y = 0$.
   b. Menentukan titik potong dengan sumbu y, diperoleh jika $x = 0$.
   c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$.
   d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$.
   e. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right)$.

Kita telah menemukan berbagai konsep dan sifat-sifat yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Demikian juga, kita telah terapkan dalam berbagai pemecahan masalah nyata. Selanjutnya akan kita bahas tentang geometri terkait kedudukan titik, garis, sudut, dan bidang pada bidang datar dan ruang dimensi tiga. Penguasaan kamu pada materi pada setiap bahasan akan bermanfaat dalam mendalami materi selanjutnya.

Bab 8

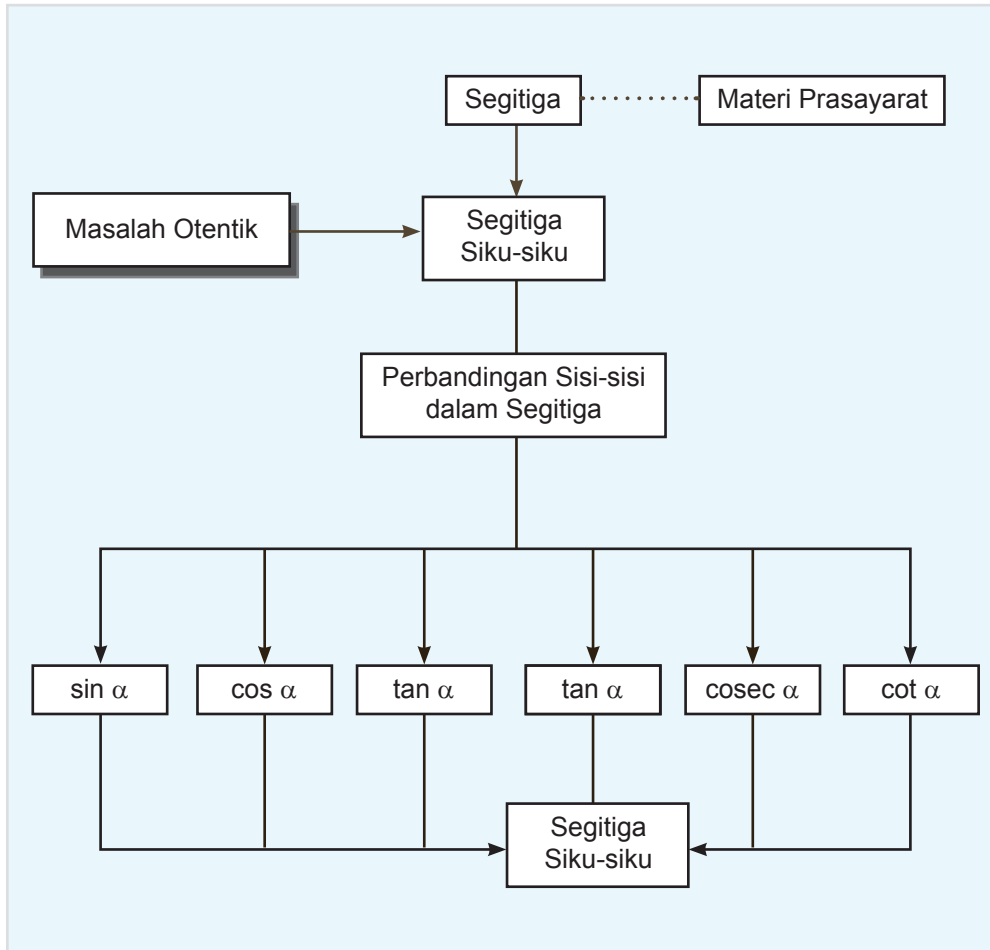
Trigonometri

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku melalui penyelidikan dan diskusi tentang hubungan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dalam beberapa segitiga siku-siku sebangun; 5. menemukan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku; 6. memahami dan menentukan hubungan perbandingan trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika. 7. memahami konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri sudut-sudut istimewa.	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

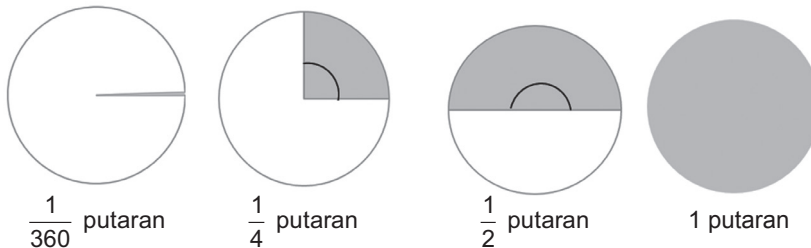
- *Sudut*
- *Derajat*
- *Radian*
- *Kuadran*
- *Perbandingan Sudut (Sinus,Cosinus, tangen, cotangen, cosecan, dan secan)*
- *Identitas trigonometri*

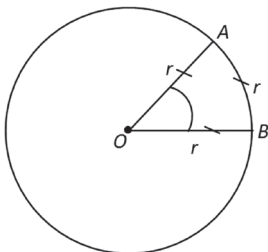
B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Sebelum memahami menemukan konsep dasar sudut, terlebih dahulu perkenalkan kepada siswa tentang ukuran sudut dalam derajat dan radian, ajukan pada siswa Gambar 8.1. Biarkan siswa lebih dahulu memahami besarnya rotasi.

Berikan pemahaman kepada siswa tentang ukuran sudut dalam derajat dan radian! Ajak siswa untuk mencermati Gambar 8.1!

1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "^{O}" dan "*rad*" berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, putaran penuh = 360^{O}, atau 1^{O} didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran penuh. Cermati gambar berikut ini!

Gambar 8.1 Deskripsi besar rotasi

Tentunya, dari Gambar 8.1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Sebelum kita memahami hubungan "derajat dengan radian", mari kita pelajari teori mengenai radian.

Gambar 8.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 8.2.

Jika besar $\angle AOB = \alpha$, $\overline{AB} = OA = OB$, maka $\alpha = \frac{\overline{AB}}{r} = 1$ radian.

Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian diselesaikan menggunakan rumus perbandingan:

Definisi 8.1

Besar $\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r}$ *rad*

Lebih lanjut, hubungan satuan derajat dengan satuan radian, bahwa 1 putaran penuh sama dengan 2π *rad*. Seperti dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 8.2

$$360^{o} = 2\pi \; rad \text{ atau } 1^{o} = \frac{\neq}{180} \; rad \text{ atau } 1 \; rad = 57{,}3^{o}$$

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.

Definisi 8.3

1. $\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4} \times 360^{o} = 90^{o} \Leftrightarrow 90^{o} = 90 \times \frac{\neq}{180} \; rad = \frac{1}{2}\pi \; rad.$
2. $\frac{1}{3}$ putaran $= \frac{1}{3} \times 360^{o} = 120^{o} \Leftrightarrow 120^{o} = 120 \times \frac{\neq}{180} \; rad = \frac{2}{3}\pi \; rad.$
3. $\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow 180^{o} = 180 \times \frac{\neq}{180} \; rad = \pi \; rad.$
4. $\frac{2}{3}$ putaran $= \frac{2}{3} \times 360^{o} = 240^{o} \Leftrightarrow 240^{o} = 240 \times \frac{\neq}{180} \; rad = \frac{4}{3}\pi \; rad.$
5. $\frac{3}{4}$ putaran $= \frac{3}{4} \times 360^{o} = 270^{o} \Leftrightarrow 270^{o} = 270 \times \frac{\neq}{180} \; rad = \frac{3}{2}\pi \; rad.$

- *Minta siswa untuk memahami contoh 1.*

Contoh 8.1

Perhatikan jenis ukuran sudut berikut ini, dan ubahlah.

1. $\frac{1}{5}\pi$ rad = ... putaran = ...°
2 $\frac{1}{6}$ putaran = ... *rad* = ...°
3. 135° = ... *rad* = ... putaran
4. Sudut yang dibentuk jarum jam, saat pukul 14.40, sama dengan berapa radian?.
5. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, berapa besar putaran dalam derajat per detik? Berapa putaran dalam radian per detik?

Penyelesaian

1. 1 putaran = 360° = 2π *rad*. Jadi, $\frac{1}{2}$ putaran = π *rad*. Oleh karena itu, $\frac{1}{5}\pi$ *rad* = $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{10}$ putaran = $\frac{1}{10} \times 360° = 36°$.

2. Karena 1 putaran = 2π *rad*, $\frac{1}{6}$ putaran = $\frac{1}{6} \times (2\pi \text{ rad}) = \frac{1}{3}\pi$ *rad* = $\frac{1}{3}\pi \times \frac{180^{O}}{\neq}$ = 60°.

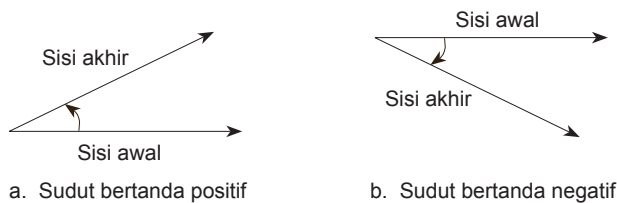
3. $135° = 135° \times \frac{\neq}{180}$ *rad* = $\frac{3}{4}\pi$ *rad* = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{6}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{10}$ putaran.

4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.55 adalah 30°, $30° = 30° \times \frac{\neq}{180}$ *rad* = $\frac{1}{6}\pi$ *rad*.

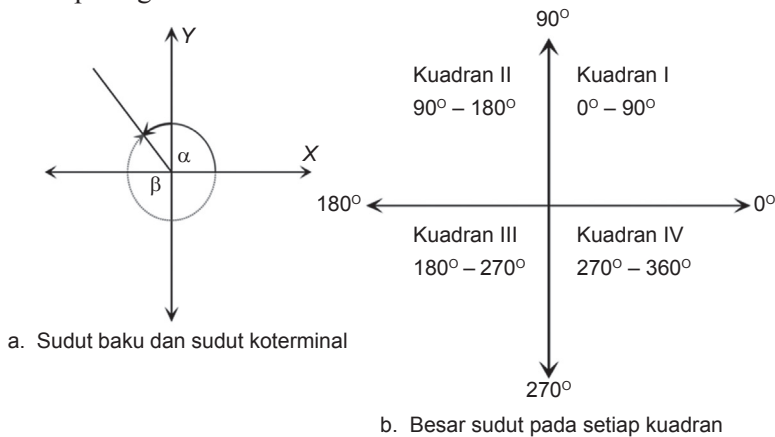
5. Jika setiap menit, alat tersebut melakukan rotasi sebanyak 60 putaran, artinya dalam 1 detik.

   Pemancar berputar sebanyak 1 putaran. Karena 1 putaran penuh = 360°, jadi pemacar tersebut berputar sebesar 360°/detik. Selanjutnya, 360° = 2π *rad*, artinya pemancar tersebut berputar sebesar 2π *rad*/detik.

> 360°, pertama sekali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia.
> Hitungan satu tahun pada kalender Babilonia, yaitu sebanyak 365 hari.

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.

Gambar 8.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°.

Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α, maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.

Gambar 8.4 Sudut secara geometri dan pembatas kuadran

Definisi 8.4

Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut ditempatkan pada posisi standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk memantapkan pemahaman akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

Contoh 8.2

Gambarkanlah sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a) 60° b) –45° c) 120° d) 600°

Penyelesaian

a)

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran I.

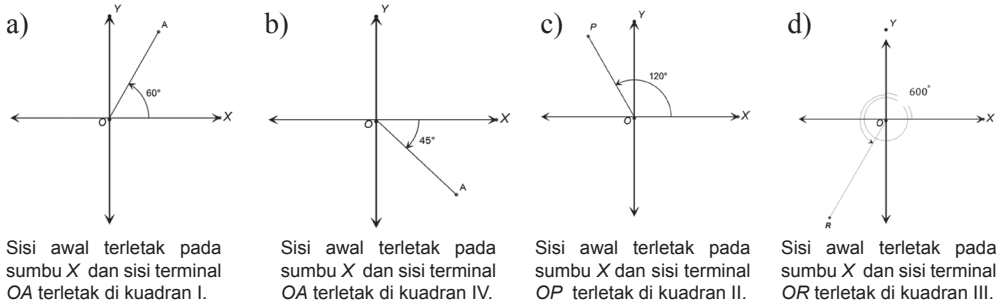
b)

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran IV.

c)

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OP terletak di kuadran II.

d)

Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OR terletak di kuadran III.

Gambar 8.5 Sudut pada setiap kuadran

Uji Kompetensi 8.1

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
   a. $\frac{1}{6}$ putaran c. $\frac{3}{10}$ putaran
   b. $\frac{2}{5}$ putaran

2. Besar sudut dalam satuan derajat berikut ini, tentukan posisi setiap sudut tersebut.
   a. 90° d. 300°
   b. 135° e. –270°
   c. 225° f. 1200°
   Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas, dalam satuan radian.

3. Misalkan, sudut θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut, dan tentukanlah posisinya.
   a. 3θ c. $\theta + \beta$
   b. 2β d. $2\beta - \theta$

4. Tentukanlah sudut komplemen dan suplemen setiap sudut di bawah ini.
   a. 15° c. 68°
   b. 105° d. 96°

5. Jika kita perhatikan jam, berapa kali kah dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini.
   a. 90° c. 30°
   b. 180° d. 120°

6. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat.
   a. $\frac{\neq}{12}$ d. $\frac{7\neq}{8}$
   b. $\frac{5\neq}{7}$ e. $\frac{7\neq}{16}$
   c. $\frac{3\neq}{5}$ f. $\frac{8\neq}{15}$

7. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk radian.
   a. 45° c. 87.4°
   b. 36° d. 0,54°

Projek

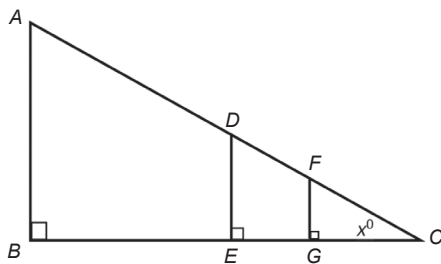
Himpun berbagai informasi penerapan sudut pada bidang fisika dan masalah nyata. Coba rancang pemecahan masalah terkait informasi yang kamu peroleh. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

2. Konsep Dasar Sudut

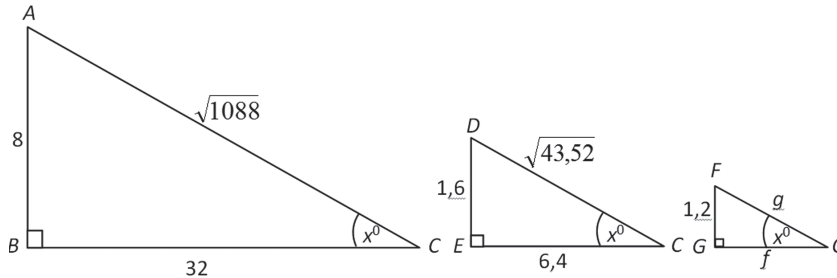
- *Ajak siswa untuk memahami deskripsi berikut.*

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda ditanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 6,4m dan 32m.Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya.

- *Tanyakan kepada siswa bagaimana jika mereka berperan sebagai Dani, apakah siswa dapat mengukur bayangannya sendiri?*

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.

Gambar 8.6 Model tiang bendera dan orang

Dimana:
AB = tinggi tiang bendera (8 m)
BC = panjang bayangan tiang (32 m)
DE = tinggi pak Yahya (1,6 m)
EC = panjang bayangan pak Yahya (6,4 m)
FG = tinggi Dani (1,2 m)
GC = panjang bayangan Dani

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga buah segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.

Gambar 8.7 Kesebangunan

- *Berikan pemahaman tentang sifat yang berlaku pada kesebangunan, selanjutnya dengan alas an kesebangunan maka akan diperoleh sebagai berikut.*

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun maka berlaku

$\dfrac{FG}{DE} = \dfrac{GC}{EC} = \dfrac{1,2}{1,6} = \dfrac{f}{6,4}$. Diperoleh $f = 4,8$

Dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh nilai dari $FC = g = \sqrt{24,48}$.
Berdasarkan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\dfrac{FG}{FC} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1,2}{\sqrt{24,48}} = \dfrac{1,6}{\sqrt{43,52}} = \dfrac{8}{\sqrt{1088}} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,24$

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C, ditulis sin $x^0 = 0,24$

b. $\dfrac{GC}{FC} = \dfrac{EC}{DC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4,8}{\sqrt{24,48}} = \dfrac{6,4}{\sqrt{43,52}} = \dfrac{32}{\sqrt{1088}} = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,97$

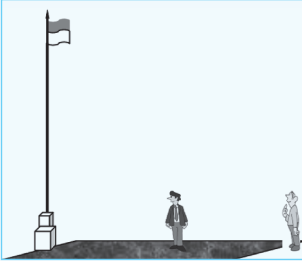
Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C, ditulis cos $x^0 = 0,97$

c. $\dfrac{FG}{GC} = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1,2}{4,8} = \dfrac{1,6}{6,4} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0,25$

Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C, ditulis tan $x^0 = 0,25$

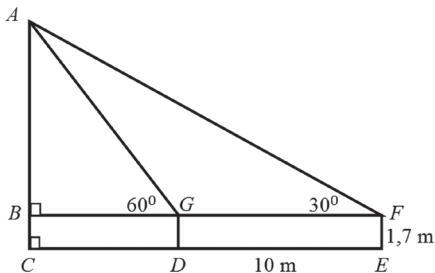
Dari ketiga segitiga tersebut, terdapat perbandingan yang sama. Perhatikan perbandingan berikut.

- *Ajukan Masalah 9.1, minta siswa untuk memahami masalah yang diajukan. Jika siswa mengalami kesulitan, bantu siswa agar siswa mampu memahami masalahnya dan dapat menyelesaikan dengan caranya sendiri. Jika tidak ada siswa yang mampu menyelesaikannya, ajak siswa untuk memahami alternatif penyelesaian yang diberikan.*

Masalah-8.1

Gambar 8.8 Tiang Bendera

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60^0 dan guru kedua 30^0 maka dapatkah anda menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh titik, maka dapat diperoleh Gambar 9.3 sebagai berikut.

Gambar 8.9 Model masalah tiang bendera

Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas maka kita memiliki perbandingan, sebagai berikut:

$$\tan 60° = \frac{AB}{BG} \quad \Leftrightarrow \quad BG = \frac{AB}{\tan 60°}$$

$$\tan 30° = \frac{AB}{BF} = \frac{AB}{10 + BG} \quad \Leftrightarrow \quad AB = (10 + BG) \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60°}\right) \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° = (10 \times \tan 60° + AB) \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° = 10 \times \tan 60° \times \tan 30° + AB \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° - AB \times \tan 30° = 10 \times \tan 60° \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \times (\tan 60° - \tan 30°) = 10 \times \tan 60° \times \tan 30°$$

$$\Leftrightarrow \quad AB = \frac{10 \times \tan 60° \times \tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°}$$

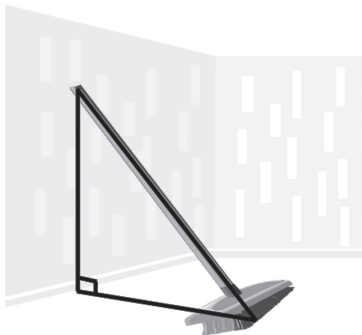
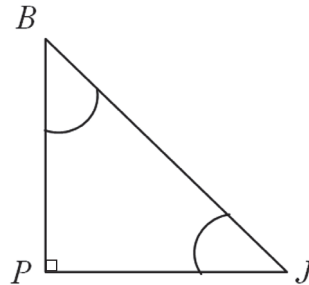
Jadi, tinggi tiang bendera adalah:

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \frac{10 \times \tan 60° \times \tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°} + 17 \text{ m.}$$

Gambar 8.10 Rumah Adat Suku Dayak

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya. Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

3. Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku. Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk segitiga siku-siku; misalnya, meletakkan posisi sapu. Perhatikan Gambar 8.11 berikut.

Gambar 8.11 Posisi Sapu di dinding

Gambar 8.12 Segitiga *PBJ*

Dari Gambar 8.11, dapat dicermati bahwa dinding dengan lantai saling tegak lurus membentuk sudut siku-siku dan sapu membentuk sisi miring. Ilustrasinya

disajikan pada Gambar 8.12. Dari Gambar 8.12, dapat disebut sisi-sisi segitiga siku-siku berturut-turut, yaitu *PB*, *PJ*, dan *JB*, dan ketiga sudutnya, berturut-turut yaitu, *J*, *B*, dan *P* adalah sudut siku-siku.

Sudut yang menjadi perhatian adalah sudut lancip pada segitiga siku-siku tersebut, yaitu $\angle J$ dan $\angle B$. Adapun hubungan perbandingan antara sudut lancip dan sisi-sisi segitiga siku-siku *BPJ* di atas.

Definisi 8.5

1. *sinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring, ditulis $\sin J = \frac{PB}{BJ}$.
2. *cosinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring cosinus *J*, ditulis $\cos J = \frac{PJ}{BJ}$.
3. *tangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, tangen *J*, ditulis $\tan J = \frac{PB}{PJ}$.
4. *cosecan suatu sudut* didefinisikan sebagai panjang sisi miring dengan sisi di depan sudut, cosecan *J*, ditulis $cosec\ J = \frac{BJ}{PB}$, atau $cosec\ J = \frac{1}{\sin J'}$. =
5. *secan suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring dengan sisi di samping sudut, secan *J*, ditulis $\sec J = \frac{BJ}{PJ}$, atau $\sec J = \frac{1}{\cos J'}$.
6. *cotangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, cotangen *J*, ditulis $cotan\ J = \frac{PJ}{PB}$ atau *cotan* $\frac{1}{\tan J'}$.

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, konsep matematika lain yang perlu diingat kembali adalah teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. *Nah*, karena yang telah didefinisikan perbadingan sudut untuk sudut lancip *J*, silahkan rumuskan ke enam jenis perbandingan sudut untuk sudut *B*.

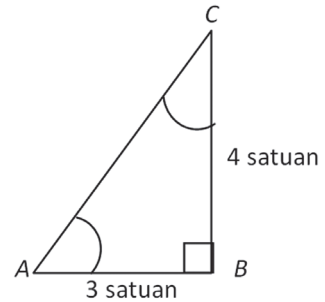
- *Agar siswa lebih memahami konsep perbandingan, ajak siswa untuk memahami dan mempelajari contoh-contoh soal berikut.*

Contoh 8.3

Diberikan segitiga siku-siku ABC, siku-siku di $\angle ABC$. Jika Panjang sisi AB = 3 *satuan*, BC = 4 *satuan*. Tentukanlah *sin A*, *cos C*, dan tan A.

Penyelesaian

Untuk segitiga di samping, dengan Teorema Phytagoras diperoleh panjang sisi
AC = 5 *satuan*. Selanjutnya, dengan menggunakan *Definisi 8.1*.
Bagian 1, 2,dan 3, maka berlaku:

- $\sin A = \dfrac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{4}{5}$
- $\cos A = \dfrac{\text{Panjang sisi di samping sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{3}{5}$
- $\tan A = \dfrac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi di samping sudut } A} = \dfrac{4}{3}$

Gambar 8.13 Segitiga siku-siku

Perlu diketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu dihadapan sudut siku-siku.

Contoh 8.4

Perhatikan segitiga siku-siku di samping ini.

Diketahui tan $M = \dfrac{8}{15}$,

tentukanlah sin M dan cos M!

Gambar 8.14 Segitiga siku-siku *KLM*

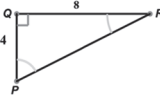
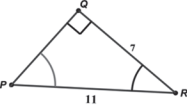
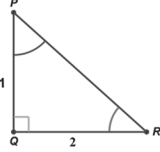
Penyelesaian

Jika pada contoh 3 diketahui panjang sisi datar dan sisi tegak segitiga, untuk menentukan perbandingan trigonometri yang diinginkan bukanlah persoalan mudah. Namun, pada contoh ini, hanya satu sisi yang diketahui panjang sisinya, yaitu sisi KL.

Untuk menjawab contoh ini, kita mulai dari tan $M = \dfrac{8}{15}$. Artinya, menurut Definisi 8.1, bahwa

$$\tan M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi di samping sudut } M} = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{15}$$

Jadi, panjang sisi $KL = 8$, dan $LM = 15$.

Sekarang, sudah dapat ditentukan panjang sisi KM, tentunya dengan Teorema Phytagoras, dengan mudah diperoleh $KM = 17$.

Nah, untuk menentukan nilai sin M dan cos K tentunya sudah mudah.

- $\sin M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{17}$ dan
- $\cos K = \frac{\text{Panjang sisi di samping sudut } K}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{LM}{KM} = \frac{15}{17}$.

Dari kedua contoh di atas, dapat dipelajari berbagai kombinasi persoalan mengenai nilai perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.

Uji Kompetensi 8.2

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakanlah jawaban Anda dalam bentuk paling sederhana.

   a)

   b)

   c)

2. Diketahui suatu segitiga siku-siku, dengan nilai sinus salah satu sudut lancipnya adalah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tentukanlah nilai cosinus, tangen sudut tersebut.

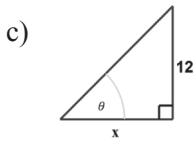
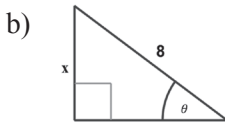
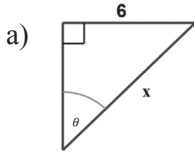
3. Pada sebuah segitiga KLM, dengan siku-siku di L, berlaku $\sin M = \frac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukanlah panjang sisi segitiga yang lain.

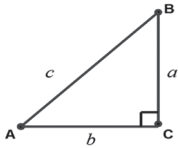
4. Luas segitiga siku-siku RST, dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T.

5. Di bawah ini diberikan tiga segitiga siku-siku, diketahui $\sin \theta = \frac{2}{5}$. Tentukanlah nilai x.

a)

b)

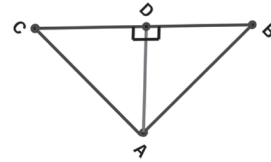
c)

6. Pada segitiga XYZ dengan siku-siku di Y, $\cos Z = \frac{20}{24}$, tentukan nilai $\tan X$ dan $\tan Z$.

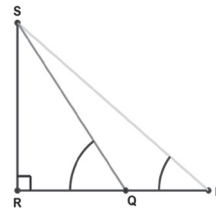
7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.

Tunjukkan bahwa:

a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

b. $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$

c) $\text{cosec}^2 A - \text{cotan}^2 A = 1$

8. Dalam segitiga siku-siku ABC, diketahui panjang $BC = a$ dan $\angle ABC$ = .
Tentukanlah panjang garis tinggi AD.

9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukanlah nilai $\sin x$ dan $\cos x$!

10. Diketahui segitiga PRS, seperti gambar di samping, siku-siku di R. Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ dan $\angle$RPS $= \gamma$. Tentukanlah panjang sisi RS!

Projek

Rancanglah masalah nyata minimal tiga buah terkait penerapan perbandingan nilai sisi segitiga dan terkait trigonometri di bidang teknik bangunan dan bidang matematika. Selesaikanlah masalah tersebut dan buat laporannya serta sajikan di depan kelas.

4. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

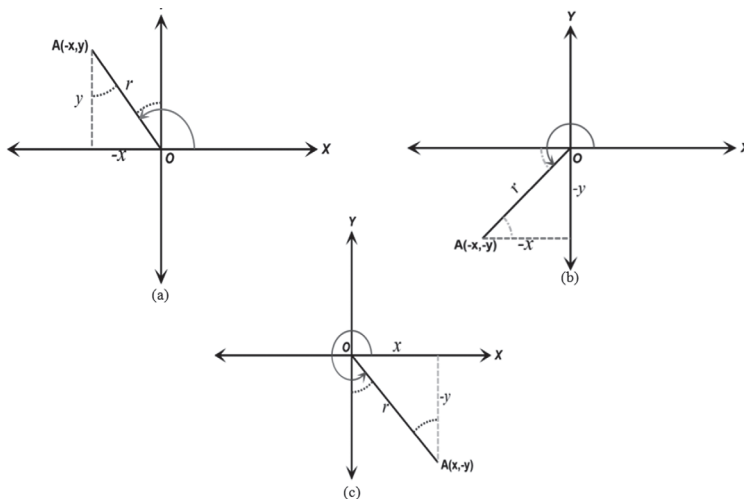
Pada awal subbab ini informasikan kepada siswa bahwa akan didiskusikan mengenai nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan dipelajari pada setiap kuadran dalam koordinat Kartesius.

- *Ajak siswa untuk memahaminya melalui pembahasan berikut ini.*

Gambar 8.15 Segitiga siku-siku *AOX* yang berada di kuadran I

Misalkan titik A (x, y), panjang $OA = r$ dan sudut $AOX = \alpha$.
Mari kita perhatikan gambar di samping, dari segitiga siku-siku yang terdapat di kuadran I, berlaku :

- $\sin \alpha = \dfrac{y}{r}$.
- $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$.
- $\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$.

Dengan mempertimbangkan semua kombinasi koordinat titik pada koordinat Kartesius, kita dapat telusuri perbedaan nilai tanda untuk ketiga perbandingan trigonometri yang utama.

Gambar 8.16 Kombinasi sudut pada koordinat Cartesius

Garis putus-putus pada gambar menyatakan proyeksi setiap sumbu, misalnya pada Gambar 8.16(a), garis putus-putus adalah proyeksi sumbu Y di kuadran II. Sedangkan garis putus-putus melengkung menyatakan besar sudut yang besarnya sama, misalnya, pada Gambar 8.16 (b), garis putus-putus melengkung menyatakan dua sudut yang besarnya sama.

Contoh 8.5

Misalkan diketahui titik-titik berikut ini:

1. A (–12,5) dan $\angle XOA = \alpha$.
2. B (15,–8) dan $\angle XOB = \theta$.

Tentukanlah nilai sin α dan tan α, serta cos θ dan tan θ!

Penyelesaian

1. Dengan memperhatikan koordinat titik A (–12,5), sangat jelas bahwa titik tersebut terletak di kuadran kedua, karena $x = –12$, dan $y = 5$. Secara geometris, disajikan pada gambar berikut ini.

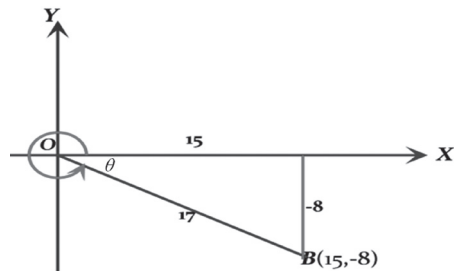
   Karena $x = –12$, dan $y = 5$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 13$. Oleh karena itu, diperoleh :

   - $\sin \alpha = \dfrac{5}{13}$.
   - $\tan \alpha = -\dfrac{5}{12}$.

Gambar 8.17 Titik *A* (–12,5) pada kuadran II

2. Titik B (15, –8), berada di kuadran IV, karena $x = 15$, dan $y = –8$.

   Untuk $x = 15$, $y = –8$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 17$. Oleh karena itu, berlaku:

   - $\cos \theta = \dfrac{15}{17}$.
   - $\tan \theta = -\dfrac{8}{17}$.

Gambar 8.18 Titik *B* (15, –8) pada kuadran IV

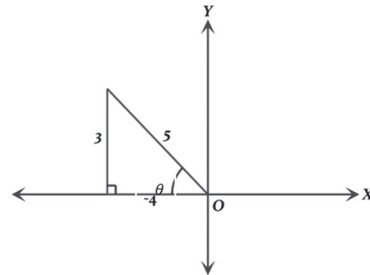
- *Beri penjelasan kepada siswa terkait contoh 4, tanyakan juga kepada siswa tentang nilai-nilai sudut perbandingan geometri. Selanjutnya, kebalikan dari kondisi pada contoh 5, dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.*

Contoh 8.6

Jika diketahui:

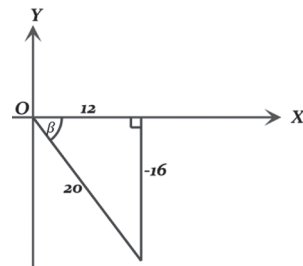
1. $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, θ berada di kuadran II, tentukan nilai cosec θ dan cotan θ.
2. $\tan \beta = -\frac{6}{12}$, β berada di kuadran IV, tentukan nilai sin β dan cos β.

Penyelesaian

1. Sudut θ yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri. Dalam koordinat Cartesius, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, digambarkan sebagai berikut:

Gambar 8.19 Titik B (15,–8) pada kuadran IV

Dari gambar di samping, mudah kita pahami bahwa:

- $\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$
- $\text{cotan } \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{4}{3}$

2. Dengan pemahaman yang sama, dapat kita gambarkan $\tan \beta = -\frac{16}{12}$, dengan β di kuadran IV sebagai berikut: Dengan atribut segitiga siku-siku yang sudah lengkap, seperti pada gambar di samping, dengan mudah kita menentukan:

Gambar 8.20 $\tan \beta = -\frac{16}{12}$ IV

- $\sin \beta = -\frac{16}{20}$, dan
- $\cos \beta = \frac{12}{20}$.

Tentunya, dengan pengetahuan dari Gambar 8.20 dan pengalaman pembahasan Contoh 8.5 dan 8.6 di atas, dapat kita merumuskan nilai perbandingan trigonometri di setiap kuadran, yaitu:

Di Kuadran I : $x > 0$, $y > 0$

- $\sin \alpha = \frac{(+)y}{(+)r} = +\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(+)x}{(+)r} = +\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(+)y}{(+)x} = +\frac{y}{x}$

Di Kuadran II : $x < 0$, $y > 0$

- $\sin \alpha = \frac{(+)y}{(+)r} = +\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(+)y}{(-)x} = -\frac{y}{x}$

Di Kuadran III : $x < 0$, $y < 0$

- $\sin \alpha = \frac{(-)y}{(+)r} = -\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$

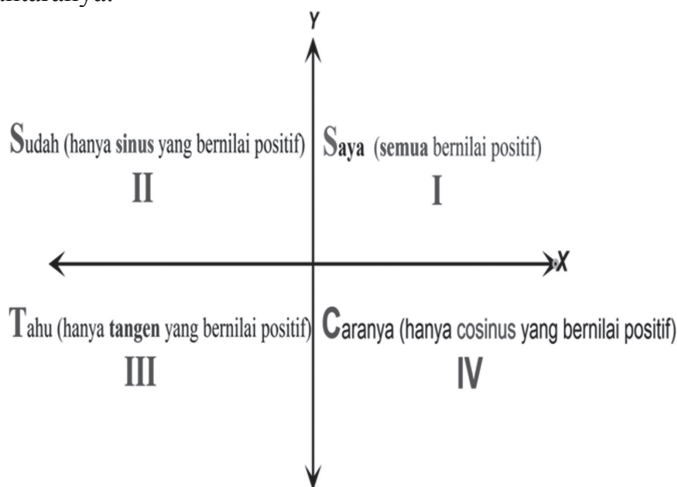
Di Kuadran IV : $x > 0$, $y < 0$

- $\sin \alpha = \frac{(-)y}{(+)r} = -\frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$

Gambar 8. 21 Nilai tanda perbandingan trigonometri untuk setiap kuadran

♦ *Ajak siswa untuk membuat kesimpulan dari hasil yang sudah dikerjakan. Selanjutnya bersama-sama dengan siswa menyimpulkan beberapa hal berikut.*

1) Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
2) Di kuadran II, hanya sin α dan cosec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
3) Di kuadran III, hanya tan α dan cotan α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
4) Di kuadran IV, hanya cos α dan sec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.

Sebagai tambahan agar siswa dapat mengingat
Banyak cara mengingat nilai tanda perbandingan trigonometri di setiap kuadran, salah satu diantaranya.

Gambar 8.22 Bagan untuk mengingat nilai perbandingan trigonom

Dalam kajian trigonometri ada istilah sudut istemewa, yang artinya sudut-sudut yang nilai perbandingan trigonometri dapat ditentukan secara eksak. Misalnya, 30°, 45°, 60°, dan 90° merupakan sudut istimewa di kuadran I. Selanjutnya (120°, 135°, 150°, 180°), (210°, 225°, 240°, 270°), dan (300°, 315°, 330°, 360°) berturut-turut adalah sudut-sudut istimewa di kuadran ke-II, ke-III, dan ke-IV. Pada beberapa referensi yang lain, sudut-sudut istimewa tersebut dinyatakan dalam satuan radian.

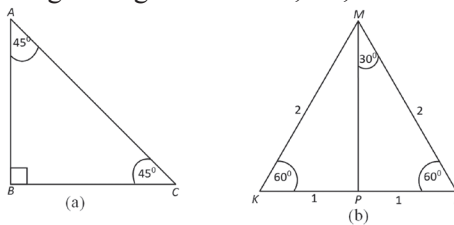
Pembahasan selanjutnya, yaitu, bagaimana nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut istimewa. Pertama sekali, kita akan kaji nilai-nilai perbandingan tersebut di kuadran I.

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30°, 45° dan 60°

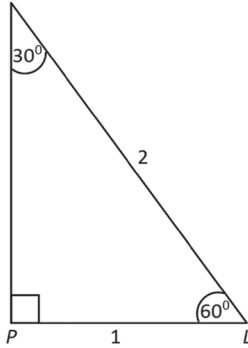
Mari perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa. Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku yang mengandung sudut 30°,45°,dan 60°. Perhatikan gambar berikut.

Dari Gambar 8.22 (b), misalkan panjang sisi jika kita menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut 30° dan 60°. Mari perhatikan segitiga *MPL* di bawah ini.

A, 45°, B, C, 45°, (a)

M, 30°, 2, 2, 60°, 60°, K, 1, P, 1, L, (b)

Gambar 8.22 Segitiga siku-siku yang memuat sudut 30°,45°,dan 60°

Dengan teorema phytagoras, diperoleh panjang MP = $\sqrt{3}$. Oleh karena itu berlaku:

- $\sin 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Gambar 8.23 Segitiga siku-siku *MPL*

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut 45°, silahkan diskusikan dan kaji bersama teman-temanmu melalui gambar segitiga *ABC* pada Gambar 8.22(a). Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada saat 0° dan 90°, mari kita cermati gambar berikut ini.

Gambar 8.24 Perbandingan Trigonometri

Secara umum, dapat ditentukan nilai semua sudut istimewa, yaitu dengan cara menentukan setiap koordinat titik pada lingkaran dengan jari-jari 1.

Misalnya untuk titik *A* (0,1),

- sin 0° = 0
- cos 0° = 1
- tan 0° = 0

dan untuk menentukan nilai perbandingan sudut pada saat sudut 90°, digunakan titik B(1,0).

- sin 90° = 1
- cos 90° = 0
- tan 90° tak terdefinisi

Selengkapnya, nilai setiap perbandingan trigonometri pada setiap sudut istimewa 0°,30°,45°,60° dan 90°, di sajikan di Tabel 8.1 berikut.

Tabel 8.1 Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuadran Pertama

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

Dengan menggunakan Gambar 8.21, dan tabel 8.1, minta siswa untuk berdidkusi dengan temannya untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran I, II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memastikan hasil kerja siswa, minta siswa untuk memperhatikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut istimewa

Tabel 8.2 Tabel lengkap Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I, II, III, dan IV

Sudut	Sin	Cos	Tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tak terdefinisi
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	0	–1	0

Sudut	Sin	Cos	Tan
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	–1	0	tak terdefinisi
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	0	1	0

- *Berikan masalah 8.2 berikut ini kepada siswa dan ajak siswa untuk berdiskusi dengan temannya.*

Masalah-8.2

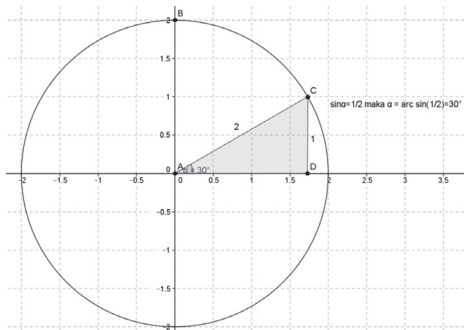
Seorang anak ingin menentukan besar sudut dari sebuah perbandingan trigonometri. Diberikan kepadanya perbandingan sebagai berikut.

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$, tugasnya adalah menentukan nilai α (besar sudut)!

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian I:

Langkah-langkah yang dilakukannya adalah

1. Menggambarkan sebuah segitiga siku-siku dan menerapkan sifat perbandingan sinus. Adapun cara yang dilakukannya adalah menggambarkan sisi di hadapan sudut dengan panjang 1 satuan dan menggambarkan sisi miring sebuah segitiga dengan panjang 2.

2. Selanjutnya dia mengukur besar sudut dari segitiga siku-siku yang sudah terbentuk dengan menggunakan busur derajat.
3. Berdasarkan pengukuran yang dilakukan ternyata diperoleh besarnya sudut α adalah 30°.

Penyelesaian II:

1. Alternatif penyelesaian yang lain yaitu dengan menggunakan kalkulator. Dengan fasilitas yang dimiliki kalkulator dapat diperoleh invers nilai sin, yaitu
   $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$.
2. Invers dari $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ selanjutnya dituliskan dengan arcsin $\frac{1}{2}$.

Penyelesaian III:

1. Alternatif yang mungkin dilakukan adalah dengan melihat tabel. Untuk kasus nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa pada kuadran I, kuadran II, kuadran, III, dan kuadran IV dapat menggunakan Tabel 8.2.

Latihan 8.1

1. Tentukan nilai β jika cos $\beta = \frac{1}{2}$!
2. Tentukan nilai θ jika tan θ = 0!

Penulisan ini juga berlaku untuk perbandingan trigonometri lainnya. Misalnya invers dari cos $x = y$ maka inversnya adalah x = arcos y; invers dari tan $x = y$ maka inversnya adalah x = arctan y.

Latihan 8.2

Jika $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan x tumpul berapakah nilai dari cos x?

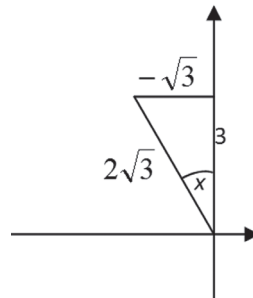
Penyelesaian

Jika x tumpul, maka x berada di kuadran ke IV, sehingga gambar segitiga siku-siku berada di kuadran ke IV. Perhatikan gambar!

Sehingga untuk nilai $\cos x = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{6}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Karena nilai cos bernilai negatif di kuadran ke IV, maka nilai $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Contoh 8.7

Perhatikan Gambar 8.25!

Tunjukkan bahwa

- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta$

Penyelesaian

Dari Gambar 8.25 berlaku:

$\sin\theta = \frac{y}{r}, \ \cos\theta = \frac{x}{r}.$

Nilai perbandingan sin θ dan cos θ dinyatakan sebagai berikut.

Gambar 8.25 Segitiga siku-siku

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

sedangkan tan $\theta = \frac{y}{x}$.

sehingga berlaku bahwa:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}\tan\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Perlu kita kenalkan, bahwa (sin θ)(sin θ) = (sin $\theta)^2$ = $\sin^2\theta$; ($\sin^2\theta$ dibaca sinus kuadrat teta). Tetapi perlu diingat bahwa, $\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$.

Tentunya, jika sin $\theta = \frac{y}{r}$ maka $\sin^2\theta$ = (sin θ).(sin θ) = $\left(\frac{y}{r}\right).\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{r^2}$.

Sama halnya untuk memahami $\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2}$, dan $\tan^2\theta = \frac{y^2}{x^2}$.

Jumlah dari sinus kuadrat teta dengan cosinus kuadrat teta dinyatakan sebagai berikut:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Jadi ditemukan:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (1)

Persamaan ini disebut sebagai persamaan identitas trigonometri.

Dari persamaan ini kita dapat menemukan turunan rumusan dalam trigonometri. Misalnya, jika kedua ruas persamaan tersebut dibagi $\cos^2\theta$, (dengan syarat $\cos^2\theta \neq 0$), maka persamaan (1) berubah menjadi:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \ \text{.. (2)}$$

Jika kita lanjutkan membagi kedua ruas persamaan (1) dengan $\sin^2\theta$, maka berlaku:

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow 1+\text{cotan}^2\theta=\text{cosec}^2\theta \quad\quad (3)$$

Formula di atas berlaku, untuk semua satuan sudut yang sama. Misalnya, α = 15°, maka 2α = 30°.
Oleh karena itu berlaku:

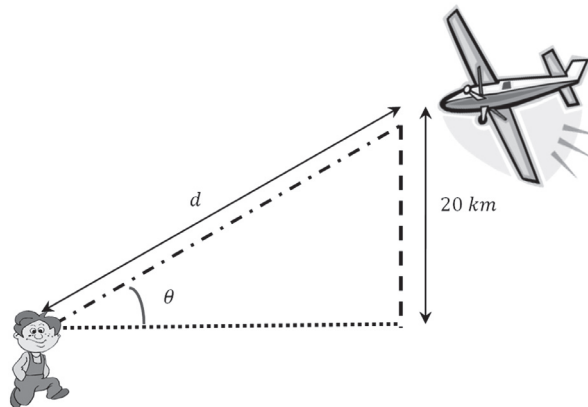
$$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=\sin^2 30°+\cos^2 30°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Tolong ingat kembali bahwa, $\sin^2 30° = \frac{1}{4}$, tetapi $\sin(30°)^2 = \sin 900° = 0$, (sudahkah kamu tahu alasannya?).

Masalah-8.3

Di daerah pedesaan yang jauh dari Bandar udara, kebiasan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka. Bolang, mengamati sebuah pesawat udara, yang terbang dengan ketinggian 20 km. Dengan sudut elevasi pengamat (Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ, tentukanlah jarak pengamat ke pesawat jika : θ = 30°, θ = 90°, dan θ = 120°.

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 8.26.

Gambar 8.26 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi *θ*.

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan sin θ, (kenapa?).

- Untuk $\theta = 30°$, maka $\sin 30° = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 30°} = \frac{20}{1/2} = 40$ km.
- Untuk $\theta = 90°$, maka $\sin 90° = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 90°} = \frac{20}{1} = 20$ km.

Artinya, dengan sudut elevasi 90°, maka pesawat tepat berada di atas si Bolang, sehingga sama dengan tinggi terbangnya pesawat.

- Untuk $\theta = 120°$, maka $\sin 120° = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 120°} = \frac{20}{\sqrt{3}/2} = \frac{40}{3}\sqrt{3}$ km.

Dapatkah kamu ilustrasikan bagaimana posisi pengamatan si Bolang dengan besar sudut elevasi, $\theta = 120°$.

Masalah-8.4

Sebuah perusahaan memproduksi mainan. Produksi hasil penjualan bulanan (dalam satuan ribuan unit) selama 2 tahun diprediksi, sebagai berikut

$$S = 23{,}1 + 0{,}442t + 4{,}3\cos\left(\pi t/6\right)$$

dengan t = waktu (bulan)

t = 1 merepresentasikan hasil penjualan bulan Januari tahun 2010.

Tentukanlah prediksi penjualan pada bulan Pebruari 2010 dan bulan April 2011.

Alternatif Penyelesaian

Jika bulan Januari tahun 2010 menyatakan waktu t = 1, maka bulan Pebruari 2010 menyatakan waktu $t = 2$, dan bulan April 2011 menyatakan $t = 16$.

1. Prediksi penjualan mainan pada bulan Pebruari 2010, waktu $t = 2$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(2) + 4{,}3\cos\left(\pi t/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}884 + 4{,}3\cos(60°)$$

$$S = 23{,}984 + 4{,}3.\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}134$$

Jadi banyaknya mainan yang terjual pada bulan Pebruari 2010 adalah sebanyak 26.134 unit.

2. Prediksi penjualan mainan pada bulan April 2011, $t = 16$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos\left(16\pi/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos(960°)$$

$$S = 30{,}172 + 4{,}3\cos(240°) \quad \text{(kenapa } \cos(960°) = \cos(240°)\text{?)}$$

$$S = 30{,}172 + 4{,}3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 28.022$$

Karena jumlah penjualan dalam ribuan unit, maka prediksi penjualan pada bulan April 2011 adalah 28.022 unit.

6. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Grafik Fungsi $y = \sin x$, $x \in [0°, 360°]$.

Dengan menggunakan nilai-nilai sudut yang telah diberikan di atas, mari kita selesaikan persamaan berikut ini.

Contoh 8.8

Tentukanlah nilai x yang memenuhi setiap persamaan di bawah ini:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0,2\pi]$

b) $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x$, $x \in [0,2\pi]$

Penyelesaian

$x \in [0,2\pi]$ merupakan domain untuk menyelesaikan persamaan pada bagian a).

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, hanya berlaku untuk $x = 30°$, dan $x = 150°$, karena perbandingan trigonometri hanya bernilai positif di kuadran I dan II. Sedangkan untuk $x = 210°$ dan $x = 330°$, nilai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pasangan nilai x dengan nilai perbandingan $\sin x$ merupakan suatu koordinat titik pada grafik fungsi sinus, yaitu koordinat:

$$\left(30°, \frac{1}{2}\right), \left(150°, \frac{1}{2}\right), \left(210°, -\frac{1}{2}\right), \left(240°, -\frac{1}{2}\right)$$

b) Persamaan $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x \Leftrightarrow 2 \sin x = -\sqrt{2}$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika kamu sudah menguasai Tabel 9.2, tentunya dengan mudah, kamu dapat menyebutkan bahwa nilai x yang memenuhi adalah $x = -225°$ dan $x = -315°$. Selain itu juga, kita harus menguasai bahwa nilai $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pada saat $x = 45°$ dan $x = 135°$.

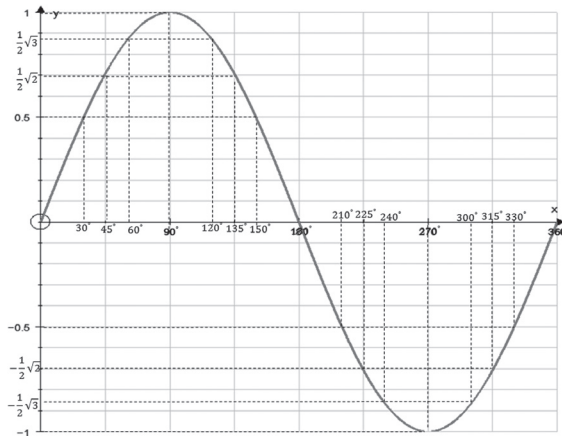
Oleh karena itu, sekarang kita memiliki pasangan titik:

$$\left(45°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Selain pasangan titik besar sudut dan nilai perbandingan trigonometri di atas, tentunya, masih terdapat pasangan koordinat yang lain, yaitu:

- $\sin x = 0$, untuk $x = 180°$ dan $x = 360°$.
  Akibatnya diperoleh: (0°,0), (180°,0), (360°,0).
- $\sin x = 1$, untuk $x = 90°$ $\sin x = -1$, untuk $x = 270°$.
  Akibatnya berlaku: (90°,1), (270°,1).
- $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $x = 60°$, dan $x = 120°$, serta $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada saat $x = 240°$, dan $x = 300°$. Oleh karena itu berlaku:

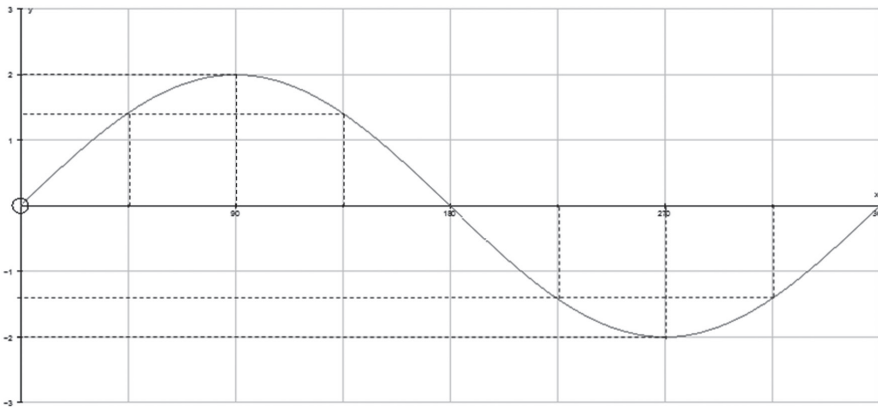
$$\left(60°, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(120°, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(240°, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(300°, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Sebagai kumulatif hasil semua pasangan titik-titik di atas, kita sajikan pada Gambar 8.27.

Gambar 8.27 Grafik fungsi $y = \sin x$, $x \in [0°,360°]$

Grafik $y = \sin x$ memiliki nilai $y_{max} = 1$ dan $y_{min} = -1$.

Secara manual, grafik di atas dapat kamu gambarkan pada kertas dengan spasi yang jelas.

- Jika fungsi $y = \sin x$, maka fungsi $y = \text{cosec } x$, untuk domain [0°,360°]. Silahkan temukan pasangan-pasangan titik untuk fungsi tersebut, kemudian sketsakan.

Berikut ini juga diberikan grafik fungsi sinus (Gambar 8.28), tetapi tentunya ada beberapa perbedaan yang anda harus cermati dan pahami. Nilai konstanta a yang memenuhi untuk fungsi di bawah ini adalah $a = 2$. Adanya konstanta, mengakibatkan perubahan pada nilai maksimum dan nilai minimum fungsi.

Gambar 8.28 Grafik fungsi $y = a \sin x$, $x \in$ [0°,360°], $a \in R$

Selanjutnya, akan kita bandingkan grafik fungsi di atas dengan grafik fungsi $y = \cos x$, $x \in$ [0°,360°].

b. Grafik Fungsi $y = \cos x$, $x \in$ [0°,360°]

Contoh 8.9

Mari cermati beberapa persamaan di bawah ini.

1) $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$.
2) $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$.

Penyelesaian

1) Persamaan $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$ merupakan persamaan trigonomteri berbentuk persamaan kuadrat. Tentunya, untuk suatu persamaan kuadrat kita membutuhkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena itu dapat kita tulis:

$$(\cos x)^2 - 2.\cos x + 1 = 0 \iff (\cos x - 1).(\cos x - 1) = 0$$

atau $(\cos x - 1)^2 = 0 \iff \cos x = 1$.

Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = 1$ adalah $x = 0°$ dan $x = 360°$ (kembali sesuaikan dengan Tabel 9.2).

Nilai $\cos x = -1$ berlaku untuk $x = 180°$ dan $\cos x = 0$ untuk $x = 90°$ dan $x = 270°$.

Akibatnya, kita temukan pasangan titik:

(0°,1), (90°,0), (180°,–1), (270°,0) dan (360°,1)

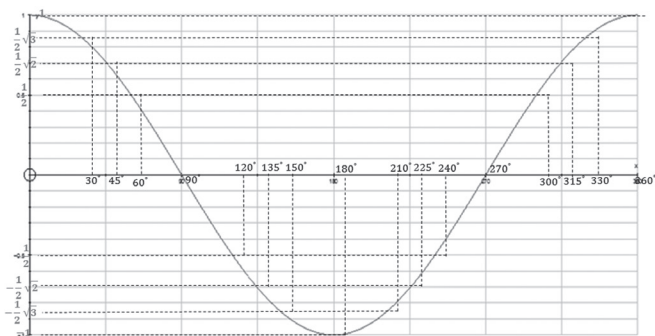
2) Persamaan $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$ dapat kita sederhanakan menjadi:

$2\sqrt{2}.\cos x - 2 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah untuk $x = 45°$ dan $x = 315°$ (lihat Tabel 9.2). Sedangkan untuk $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ berlaku untuk $x = 135°$ dan $x = 225°$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan pasangan titik-titik berikut:

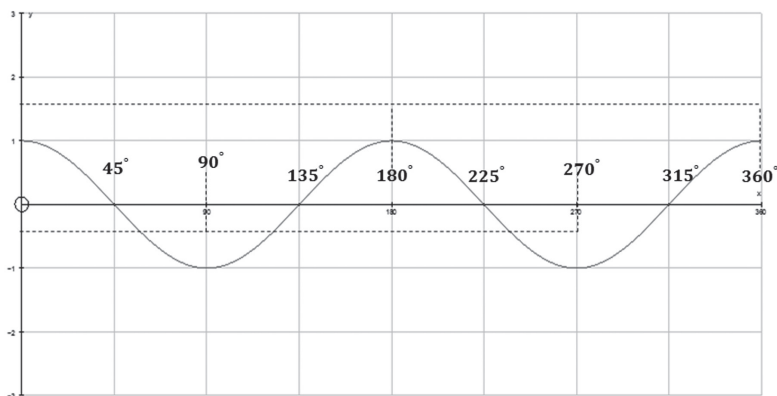
$$\left(45°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \left(315°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

- Selanjutnya, silahkan bentuk pasangan-pasangan titik yang lain, dapat kita lihat dari Tabel 8.2.

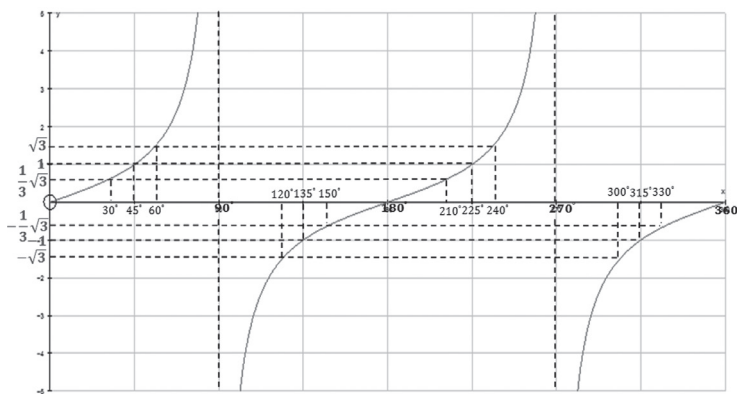
Jadi, dengan menggunakan semua pasangan-pasangan titik di atas, berikut ini disajikan pada grafik berikut:

Gambar 8.29 Grafik fungsi y = cos *x*, *x* ϵ [0°,360°]

Dari grafik di atas, dapat kita cermati bahwa seiring bertambahnya domain fungsi $y = \cos x$, kurva bergerak dari $y = 1$ hingga mencapai kembali $y = 1$. Nilai maksimum fungsi $y = \cos x$ memiliki nilai $y_{maks} = 1$ dan nilai $y_{min} = -1$.

- Minta siswa untuk menentukan pasangan titik-titik yang dilalui grafik fungsi $y = \sec x$, untuk $x \in [0°,360°]$. Kemudian sajikan pasangan titik-titik tersebut dalam grafik fungsi trigonometri.

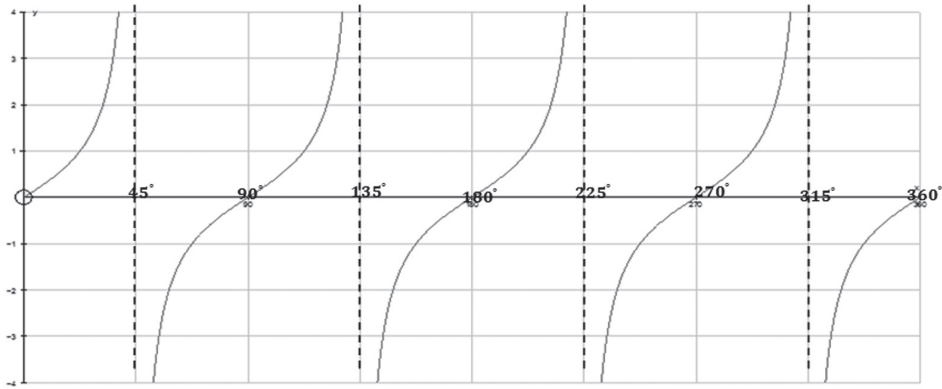
Gambar 8.30 di bawah ini adalah grafik $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$. Cermati dan tentukan perbedaan dengan grafik $y = \cos x$.

Gambar 8.30 Grafik fungsi *y* = cos *bx*, *x* ϵ [0°,360°], *b* ϵ *R*

c. Grafik Fungsi $y = \tan x$, $x \in [0°,360°]$.

Dengan cara yang sama, menggambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $x \in [0°,360°]$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.

Gambar 8.31 Grafik fungsi *y* = tan *x*, *x* ϵ [0°,360°]

Grafik di atas, berbeda dengan grafik y = sin x dan y =cos x. Khususnya, mengenai nilai maksimum dan nilai minimum fungsi. Perhatikan nilai fungsi disaat $x \rightarrow 90°$ dan $x \rightarrow 270°$ (dari kanan), nilai y = tan x menuju tak terhingga. Sebaliknya, untuk $x \rightarrow 90°$ dan $x \rightarrow 270°$ (dari kiri), nilai y = tan x menuju negatif tak terhingga.

- Dengan keadaan ini, apa yang dapat kalian simpulkan dari gambar di atas?

Selanjutnya, cermati grafik di bawah.

Gambar 8.32 Grafik fungsi *y* = tan *ax*, *x* ϵ [0°,360°], dan *a* ϵ *R*

Uji Kompetensi 8.3

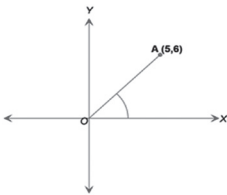
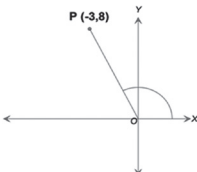
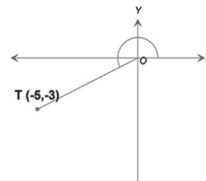
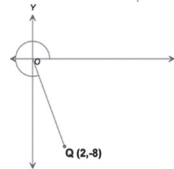
1. Perhatikan setiap gambar di bawah ini, tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen, secan, cosec, dan cotangen setiap sudut yang dinyatakan.

   a.

   b.

   c.

   d.

   Y
   O
   X
   Q (2,-8)

2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen untuk setiap titik yang disajikan berikut:

a. $P(5,12)$
b. $Q(–5.2,7.2)$
c. $R(–5,–2)$
d. $T(3.5,–7.75)$

3. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut. Berikan alasanmu.
   a. sec x dan sin x selalu mimiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.
   b. Di kuadran I, nilai sinus selalu lebih besar daripada nilai cosinus.
   c. Untuk $30° < x < 90°$, dan $120° < y < 150°$, maka nilai $2.\sin x < \cos 2y$

4. Di bawah ini disajikan tabel yang menjelaskan tanda nilai beberapa perbandingan trigonometri.

sin α > 0	cos α > 0
sin α < 0	cos α < 0
tan α < 0	sin α > 0

   Tentukanlah letak sudut α untuk setiap kondisi tanda nilai perbandingan.

5 Diberikan $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$ dengan $\sin \alpha > 0$, tentukanlah:
   a. cos α
   b. sec α
   c. (sin α).(cos α)
   d. $\frac{\text{cosec } \alpha}{\text{cotan } \alpha}$

6. Diketahui $\pi/_2 \le \beta \le 3\pi/_2$, dan nilai cotan β=3 tidak terdefinisi. Tentukanlah :
   a. sin β
   b cos β
   c. $\frac{\sin \beta}{\tan \beta + 1}$
   d. $\frac{2\sec \beta}{\tan \beta - 1}$

7. Sederhanakanlah bentuk persamaan berikut ini.
   a. cos x.cosec x.tan x
   b. cos x.cotan x + sin x

8. Diketahui β berada di kuadran III, dan $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, tentukanlah:
   a. $\frac{\sec \beta - \tan^2 \beta}{\tan \beta} + \sec \beta$
   b. $\frac{\sec^2 \beta + \tan^2 \beta}{2\sin^2 \beta + 2\cos^2 \beta}$

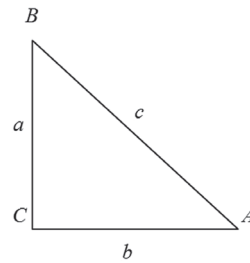
9. Sederhanakanlah bentuk ekspresi berikut.
   a. $\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{\sin A}{1 - \cos A}$
   b. $(\sin B + \cos B)^2 + (\sin B - \cos B)^2$
   c. (cosec A – cotan A).(1 + cos A)

10. Jika diketahui $Y_1 = a \sin bx$, dan $Y_2 = a \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $a, b \in R$. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum kedua fungsi, dan gambarkanlah gambar kedua fungsi.

Projek

Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam permasalahan tersebut. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

1. Pada segitiga siku-siku *ABC* berlaku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi hypothenusanya atau secara simbolik ditulis $a^2 + b^2 = c^2$ dengan c merupakan panjang sisi miring dan a serta b panjang sisi-sisi yang lain dari segitiga siku-siku tersebut.
2. Pada gambar segitiga siku-siku *ABC* dengan sudut siku-sikku berada di C, maka berlaku perbandingan trigonometri berikut.
   a. $\sin A = \dfrac{a}{c}$
   b. $\cos A = \dfrac{b}{c}$
   c. $\tan A = \dfrac{a}{b}$
3. Nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran berlaku sebagai berikut.
   a. Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
   b. Pada kuadran II, hanya sin α dan cosec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   c. Pada kuadran III, hanya tan α dan cotan α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   d. Pada kuadran IV, hanya cos α dan sec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.

4. Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah sebagai berikut.

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Bab 9

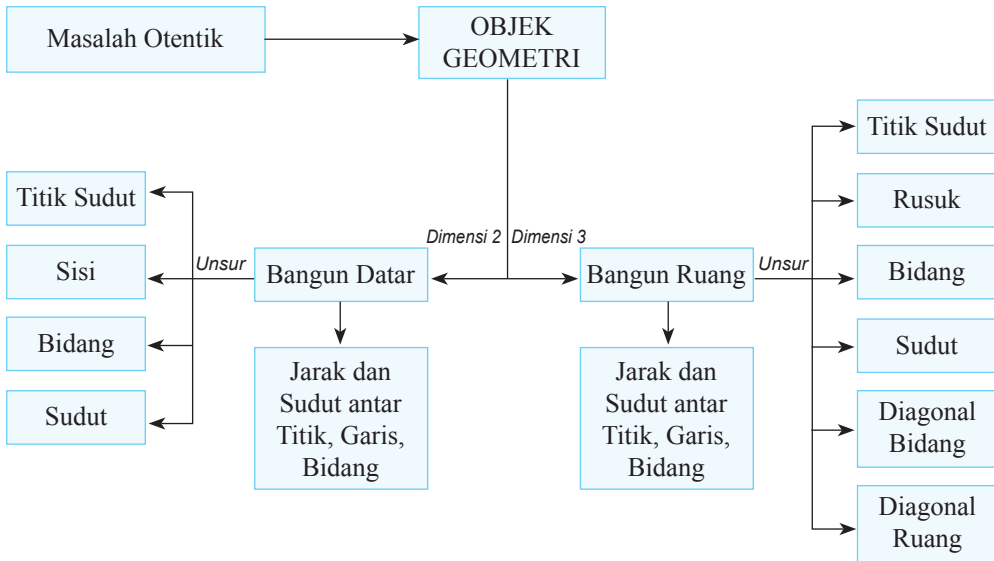
Geometri

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. memiliki motivasi internal dan merasakan keindahan dan keteraturan matematika dalam perhitungan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat bangun datar dan ruang; 2. memahami konsep jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang melalui demonstrasi menggunakan alat peraga atau media lainnya; 3. menggunakan berbagai prinsip bangun datar dan ruang serta dalam menyelesaikan masalah nyata berkaitan dengan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang.	Melalui pembelajaran materi geometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep dan prinsip geometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip bangun datar dan ruang dalam geometri untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Titik*
- *Garis*
- *Bidang*
- *Ruang*
- *Jarak*
- *Sudut*
- *Diagonal*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Kedudukan Titik

- *Ajak siswa untuk menyimak ilustrasi berikut! Berikan pertanyaan agar siswa dapat memahami tentang kedudukan titik.*

Gambar 9.1a Burung **Gambar 9.1b Titik pada garis**

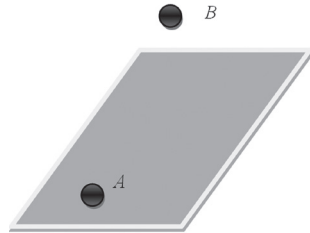
Perhatikan Gambar 9.1a dan Gambar 9.1b. Apa yang bisa kamu lihat? Misalkan kabel listrik adalah suatu garis dan burung adalah titik, maka dapat dikatakan bahwa tempat hinggap burung pada kabel listrik merupakan sebuah titik yang terletak pada suatu garis, yang dapat dilihat pada Gambar 9.1b.

Gambar berikut akan mencoba pemahaman kamu terhadap kedudukan titik dengan garis.

Gambar 9.2a Jembatan penyeberangan **Gambar 9.2a Garis dan titik**

Jika dimisalkan jembatan penyeberangan merupakan suatu garis dan lokomotif kereta adalah suatu titik. Kita dapat melihat bahwa lokomotif tidak terletak atau melalui jembatan penyeberangan. Artinya jika dihubungkan dengan garis dan titik maka dapat disebut bahwa contoh di atas merupakan suatu titik yang tidak terletak pada garis.

Untuk lebih melengkapi pemahaman kedudukan titik terhadap garis, perhatikan pula Gambar 9.3a dan Gambar 9.3b.

Gambar 9.3a Bola di lapangan

Gambar 9.3b Dua titik *A* dan *B*

Gambar di atas merupakan contoh kedudukan titik terhadap bidang, dengan bola sebagai titik dan lapangan sebagai bidang. Sebuah titik dikatakan terletak pada sebuah bidang jika titik itu dapat dilalui bidang seperti terlihat pada titik *A* pada gambar dan sebuah titik dikatakan terletak di luar bidang jika titik itu tidak dapat dilalui bidang.

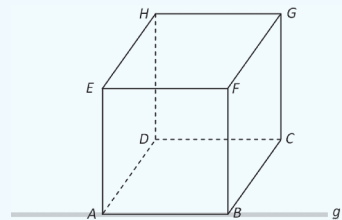
- *Ajak siswa untuk memahami masalah-masalah berikut. Minta siswa untuk menyelesaikannya sendiri. Jika ada hambatan beri bantuan berdasarkan konsep dan prinsip yang telah diketahui siswa sebelumnya.*

Masalah-9.1

Sebuah kardus berbentuk kubus *ABCD.EFGH*. Perhatikanlah kubus tersebut. Segmen atau ruas garis *AB* sebagai wakil garis *g*.

Pertanyaan:

a. Tentukan titik sudut kubus yang terletak pada garis *g*!

b. Tentukan titik sudut kubus yang berada di luar garis *g*!

Gambar 9.4 Kubus *ABCD.EFGH* dan garis *g*

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH* dan garis g dari gambar di atas, dapat diperoleh:

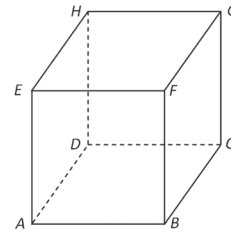
a. titik sudut kubus yang terletak pada garis *g* adalah titik *A* dan *B*.

b. titik sudut kubus yang berada di luar garis g adalah titik *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, dan *H*.

Contoh 9.1

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 9.5!
Terhadap bidang *DCGH*, tentukanlah:

a. titik sudut kubus apa saja yang terletak pada bidang *DCGH*!

b. titik sudut kubus apa saja yang berada di luar bidang *DCGH*!

Gambar 9.5 Kubus *ABCD.EFGH*

Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH*, pada bidang *CDGH* dapat diperoleh:

- Titik sudut yang berada di bidang *CDGH* adalah *D*, *C*, *G*, dan *H*.
- Titik sudut yang berada di luar bidang *CDGH* adalah *A*, *B*, *E*, dan *F*.

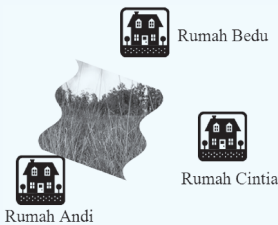
Definisi 9.1

1) Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
2) Jika suatu titik tidak dilalui garis maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
3) Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
4) Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

Pertanyaan Kritis

Jika suatu titik dilalui oleh garis atau bidang, apakah titik memiliki jarak terhadap garis dan apakah titik memiliki jarak terhadap bidang?

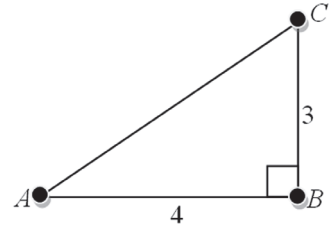
b. Jarak antara Titik dan Titik

Masalah-9.2

Gambar-9.6 Peta rumah

Rumah Andi, Bedu, dan Cintia berada dalam satu pedesaan. Rumah Andi dan Bedu dipisahkan oleh hutan sehingga harus menempuh mengelilingi hutan untuk sampai ke rumah mereka. Jarak antara rumah Bedu dan Andi adalah 4 km sedangkan jarak antara rumah Bedu dan Cintia 3 km. Dapatkah kamu menentukan jarak sesungguhnya antara rumah Andi dan Cintia?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan rumah Andi, Bedu, dan Cintia diwakili oleh tiga titik yakni A, B, dan C.

Dengan membuat segitiga bantu yang siku-siku maka ilustrasi di atas dapat digambarkan menjadi:

Gambar 9.7 Segitiga siku-siku

Dengan memakai prinsip teorema Phytagoras, pada segitiga siku-siku ABC, maka dapat diperoleh panjang dari titik A dan C, yaitu:

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$AC = \sqrt{25}$$

$$AC = 5.$$

Dari hasil di atas disimpulkan bahwa jarak antara titik A dan C adalah 5, maka jarak antara rumah Andi dan Cintia diperoleh 5 km.

Masalah-9.3

Seorang satpam sedang mengawasi lalu lintas kendaraan dari atap suatu gedung apartemen yang tingginya 80 m mengarah ke lapangan parkir. Ia mengamati dua buah mobil yang yang sedang melaju berlainan arah. Terlihat mobil *A* sedang bergerak ke arah Utara dan mobil *B* bergerak ke arah Barat dengan sudut pandang masing-masing sebesar 50° dan 45°.

Berapa jarak antar kedua mobil ketika sudah berhenti di setiap ujung arah?

Alternatif Penyelesaian

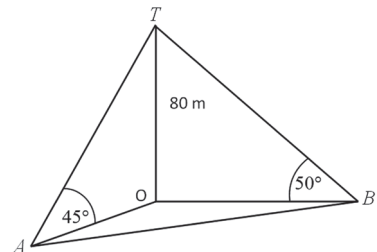
Diketahui:

Misalkan: Mobil A = titik A, memiliki sudut pandang 50°

Mobil B = titik B, memiliki sudut pandang 45°.

Tinggi gedung = 80 m

Ditanya: Jarak antar kedua mobil sesudah berhenti?

Perhatikan ilustrasi masalah dalam gambar berikut.

Gambar 9.8 Posisi mobil dari gedung

Dari Gambar 9.8, kita memfokuskan perhatian terhadap segitga *AOT* dan segitiga *BOT*. Pada segitiga *TAO*, panjang *AO* dapat ditentukan dengan menggunakan perbandingan tangen.

$$\tan 45° = \frac{OT}{AO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{OT}{\tan 45°} = 80$$

Pada segitiga TOB,

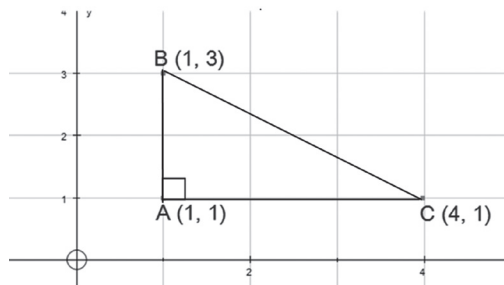
$$\tan 45° = \frac{OT}{BO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow BO = \frac{OT}{\tan 50°} = 67,22$$

Masih dengan menggunakan teorema Phytagoras pada segitiga *AOB*, diperoleh

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2} \\ &= \sqrt{(80)^2 + (67,22)^2} \\ &= \sqrt{10918,52} \\ &= 104,49 \end{aligned}$$

Maka diperoleh, jarak antara kedua mobil tersebut adalah 104,49 m.

Contoh 9.2

Perhatikan posisi titik titik berikut ini!

Gambar 9.9 Koordinat titik *A*, *B*, dan *C*

Jarak titik *A* (1,1) ke *C* (4,1) dapat ditentukan melalui formula,

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3.$$

Dengan cara yang sama, kamu dapat tunjukkan panjang segmen garis *AB* dan *BC*, yaitu 2 dan $\sqrt{13}$.

Tentunya panjang ketiga segmen AB, BC, dan AC memenuhi Theorema Phytagoras. (Silahkan tunjukkan!).
Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan.

Rumus 9.1

Titik A, B, dan C adalah titik-titik sudut segitiga ABC dan siku-siku di C, maka jarak antara titik A dan B adalah:

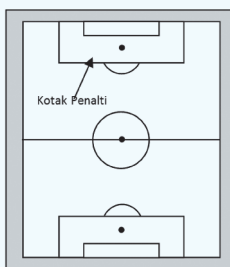
$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$

c. Jarak Titik ke Garis

- *Ajak siswa untuk memahami letak titik pada garis. Diharapkan siswa sudah mengetahui kedudukan titik terhadap garis.*
- *Jelaskan kepada siswa bahwa terdapat dua kemungkinan titik pada garis, yaitu titik terletak pada garis atau titik berada di luar garis. Titik dikatakan terletak pada garis, jika titik tersebut dilalui oleh garis. Dalam hal ini, jarak titik ke garis adalah nol.*
- *Minta siswa untuk memahami Gambar 9.6, kita dapat melihat bahwa titik A dan B terletak pada garis g. Titik A dan titik B dikatakan sebagai titik yang segaris atau kolinear.*

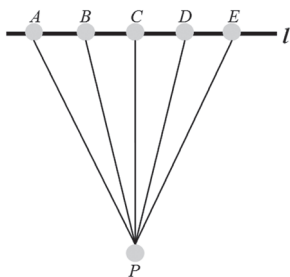
Untuk selanjutnya mari kita cermati kemungkinan jarak titik yang tidak terletak pada suatu garis, dengan kata lain kita akan mengkaji jarak titik terhadap garis dengan kegiatan dan permasalahan berikut.

Gambar 9.10 Titik terletak pada garis

Masalah-9.4

Gambar 9.11 Lapangan sepakbola

Bentuklah tim kelompokmu, kemudian pergilah ke lapangan sepakbola yang ada di sekolahmu. Ambil alat ukur sejenis meteran yang digunakan untuk mengukur titik penalti terhadap garis gawang. Ukurlah jarak antara titik penalti terhadap titik yang berada di garis gawang, lakukan berulang-ulang sehingga kamu menemukan jarak yang minimum antara titik penalti dengan garis gawang tersebut!

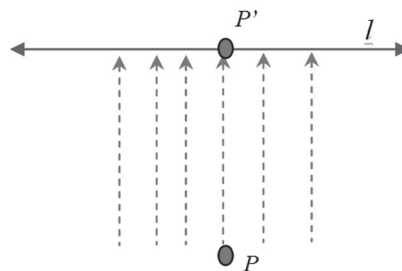
Alternatif Penyelesaian

Jika dimisalkan titik penalti adalah titik P dan garis gawang merupakan garis lurus l. Tentukanlah beberapa titik yang akan diukur, misalkan titik-titik tersebut adalah A, B, C, D, dan E. Kemudian ambil alat ukur sehingga kamu peroleh jarak antara titik P dengan kelima titik tersebut. Isilah hasil pengukuran kamu pada tabel yang tersedia.

Gambar 9.12 Jarak titik

Tabel 8.1 Jarak Titik Penalti

Titik	Jarak
P dan A	
P dan B	
P dan C	
P dan D	
P dan E	

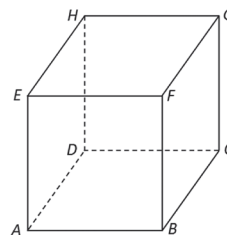
Apakah panjang ruas garis PA, PB, PC, PD, PE, adalah sama? Menurutmu, bagaimana menentukan jarak dari titik P ke garis l? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Sekarang, coba kamu bayangkan ada cahaya yang menyinari titik P tepat di atasnya. Tentu saja akan diperoleh bayangan titik P pada garis, yaitu P'. Untuk itu kita dapat mengatakan bahwa panjang PP' merupakan jarak titik P ke garis l . Sedangkan, P' merupakan projeksi titik P pada garis l. Jadi, jarak titik p ke garis l adalah PP'.

Gambar 9.13 Projeksi titik P pada garis l

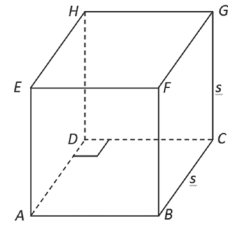
Contoh 9.3

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Tentukan projeksi titik A pada garis

a. CD!

b. BD

Gambar 9.14 Kubus *ABCDEFGH*

Penyelesaian

a. Proyeksi titik A pada garus CD
Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis CD maka diperoleh titik D sebagai hasil proyeksinya ($AD \perp CD$).

Gambar 9.15 Proyeksi titik *A* pada garis *CD*

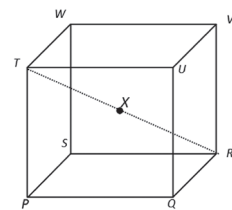
Gambar 9.16 Proyeksi titik *A* pada garis *BD*

b. Proyeksi titik A pada garis BD
Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis BD maka diperoleh titik T sebagai hasil proyeksinya ($AT \perp BD$).

Contoh 9.4

Sebuah kubus $PQRS.TUVW$, panjang rusuknya 4 cm. Titik X terletak pada pusat kubus tersebut, seperti yang disajikan pada Gambar 9.17.

- *Jelaskan pada siswa mengenai arti titik pusat kubus (bangun ruang), lalu minta siswa untuk menghitung jarak antara*

i. titik R dan X
ii. titik X dan garis PQ

Gambar 9.17 Kubus *PQRS.TUVW* dengan titik pusat *X*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui panjang rusuk kubus $a = 4$ cm.

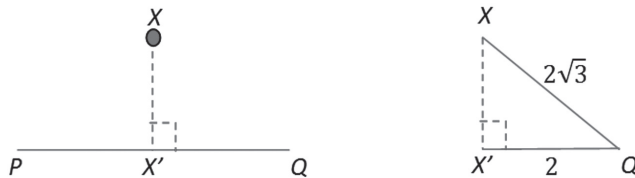
i. Karena X adalah titik tengah ruas garis RT, maka jarak $RX = \frac{1}{2}RT$. RT merupakan diagonal ruang kubus sehingga berdasarkan sifat kubus, panjang diagonal ruang kubus adalah $a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ sehingga,

$$RX = \frac{1}{2}RT$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Diperoleh, jarak titik R ke X adalah $2\sqrt{3}$ cm.

ii. Perhatikan gambar berikut.

Jarak antara X dan PQ adalah panjang ruas garis XX'. Dengan menggunakan segitiga siku-siku $XX'Q$, kita akan menentukan panjang XX'.

$X'Q = \frac{1}{2} PQ = 2$, sementara $XQ = \frac{1}{2} QW = 2\sqrt{3}$ sehingga

$$XX' = \sqrt{(XQ)^2 - (X'Q)^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2}$$

$$= \sqrt{12 - 4}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

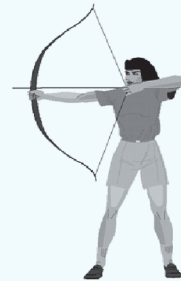
Jadi, jarak antara titik X ke PQ adalah $2\sqrt{2}$cm.

---

d. Jarak Titik ke Bidang

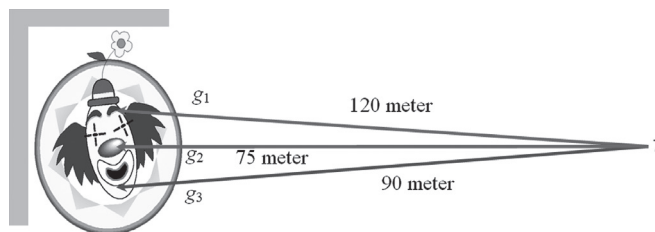
Dalam satu bidang, kita dapat menemukan titik-titik dan membentuk garis. Mari kita cermati masalah berikut ini yang terkait dengan masalah jarak titik terhadap suatu bidang.

Masalah-9.5

Perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 9.18 Seorang pemanah sedang melatih kemampuan memanah

Tino, seorang atlet panahan, sedang mempersiapkan diri untuk mengikuti satu pertandingan besar tahun 2012. Pada satu sesi latihan di *sport center*, mesin pencatat kecepatan menunjukkan, kecepatan anak panah 40 m/det, dengan waktu 3 detik, tetapi belum tepat sasaran.
Oleh karena itu, Tino, mencoba mengganti jarak posisi tembak semula terhadap papan target sedemikian sehingga mampu menembak tepat sasaran, meskipun kecepatan dan waktu berubah sesuai dengan perubahan jarak.
Berapakah jarak minimal posisi Tino terhadap target?

Alternatif Penyelesaian

Tentunya, lintasan yang dibentuk anak panah menuju papan target berupa garis lurus. Keadaan tesebut dapat kita ilustrasikan sebagai berikut.

Kondisi awal, jarak antara posisi Tino terhadap papan target dapat diperoleh dari rumusan berikut.

$$s = v.t \Leftrightarrow 3 \times 40 = 120 \text{ m}.$$

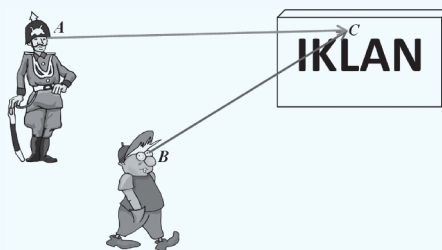
Dari dua hasil pergantian posisi, pada tembakan ketiga, dengan posisi 75 m, Tino berhasil menembak pusat sasaran pada papan target.

Posisi Tino, dapat kita sebut sebagai posisi titik *T*, dan papan target kita misalkan suatu bidang yang diletakkan dengan *p* satuan jarak dari titik *T*.

Cermati garis g_1, walaupun panjang garis itu tersebut adalah 120 meter, bukan berarti garis tersebut menjadi jarak titik *T* terhadap papan target. Sama halnya dengan garis g_3, bukan berarti jarak Tino terhadap papan target sebesar 90 meter. Tetapi panjang garis g_2, merupakan jarak titik *T* terhadap papan target.

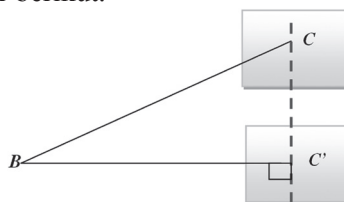
Jadi, metode menghitung jarak antara satu objek ke suatu bidang harus membentuk lintasan garis lurus yang tegak lurus terhadap bidang.

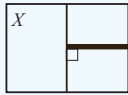
Masalah-9.6

Suatu perusahaan iklan, sedang merancang ukuran sebuah tulisan pada sebuah spanduk, yang akan dipasang sebuah perempatan jalan. Tulisan/ikon pada spanduk tersebut diatur sedemikian sehingga, setiap orang (yang tidak mengalami gangguan mata) dapat melihat dan membaca dengan jelas spanduk tersebut. Ilustrasi keadaan tersebut diberikan pada Gambar 9.19 berikut ini.

Gambar 9.19 Sudut pandang dua orang terhadap suatu spanduk

Pada Gambar 9.19, jarak titik *A* terhadap spanduk adalah panjang garis *AC*, karena garis *AC* tegak lurus terhadap bidang spanduk. Panjang garis *BC* bukanlah jarak sesungguhnya jarak si *B* terhadap spanduk. Untuk menentukan jarak si *B* terhadap bidang (spanduk), diilustrasikan pada gambar berikut.

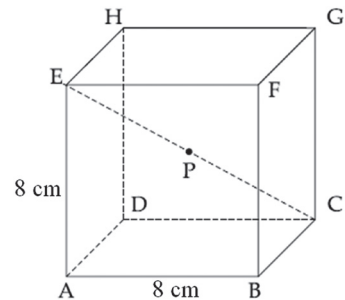
Titik *C′* merupakan projeksi titik *C* pada bidang yang sama (spanduk). Jadi jarak sebenarnya titik *B* terhadap spanduk sama dengan jarak titik *B* terhadap titik *C′*.

Jelasnya untuk keadaan ini, teorema Phytagoras berperan untuk menyelesaikan masalah jarak.

Gambar 9.20 Jarak titik *B* ke titik *C*

Definisi 9.2

Misalkan X adalah suatu bidang datar, dan titik P merupakan sebuah titik yang berada diluar bidang X. Jarak antara titik P terhadap bidang X, merupakan jarak titik P ke tiitk berat bidang X.

Contoh 9.5

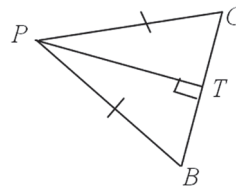
Perhatikan kubus di samping.
Kubus $ABCD.EFGH$, memiliki panjang rusuk 8 cm. Titik P terletak pada pusat kubus tersebut.

Hitunglah jarak
a) Titik B ke P!
b) Titik P ke BC!

Gambar 9.21 Kubus *ABCD.EFGH* titik pusat *P*

Penyelesaian

Cermati gambar kubus di atas. Tentunya, dengan mudah kamu dapat menentukan bahwa panjang $AC = 8\sqrt{2}$ cm , dan panjang diagonal ruang $CE = 8\sqrt{3}$ cm.

a) Karena P merupakan titik terletak pada pusat kubus, maka panjang segmen garis $BP = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}CE = 4\sqrt{3}$ cm.

b) Jarak titik P terhadap BC, berarti kita akan menghitung jarak titik terhadap garis. Lebih jelas kondisi tersebut, cermati segitiga sama kaki BPC pada Gambar 9.22

$PB = PC = 4\sqrt{3}$
$BC = 8$ cm

Gambar 9.22 Segitiga sama kaki *BPC*

Dari segitiga samakaki di atas, berlaku:

$$PT^2 = PB^2 - BT^2$$

$$PT^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - (4)^2 = 32$$

$$PT^2 = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

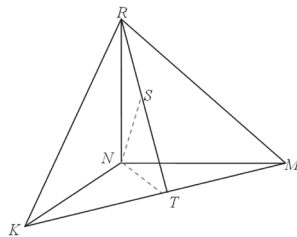
- *Minta siswa untuk menentukan ulang jarak titik P terhadap garis BC, dengan menggunakan cara lain. Pastikan hasil kerja yang diperoleh siswa sama dengan hasil perkerjaan di atas!*

Contoh 9.6

Sebuah kubus *KLMN.OPQR* memiliki panjang rusuk 6 cm. Perhatikan segitiga *KLR*, tentukanlah jarak titik *N* ke bidang *KMR*

Gambar 9.23 Kubus *KLMN.OPQR*

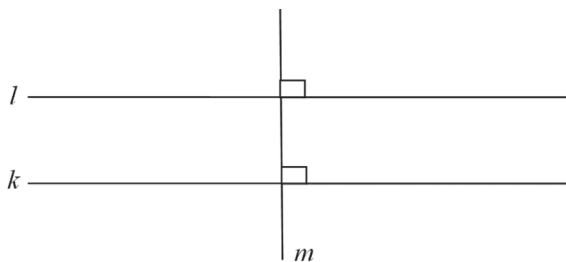
Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan persoalan di atas, ada baiknya kita mendeskripsikan sebagai berikut.

$KM = 6\sqrt{2}$ cm
$RT = 3\sqrt{6}$ cm
$NT = 3\sqrt{2}$ cm

Sekarang, cermati bahwa segitiga KMR menjadi bidang penghubung menentukan panjang titik N ke bidang KMR, yaitu NS. Dengan menggunakan perbandingan panjang rusuk segitiga, maka berlaku:

$NT.NR = RT.NS \Leftrightarrow 3\sqrt{2}.6 = 3\sqrt{6}.NS$, sehingga diperoleh: $NS = 2\sqrt{3}$ cm.

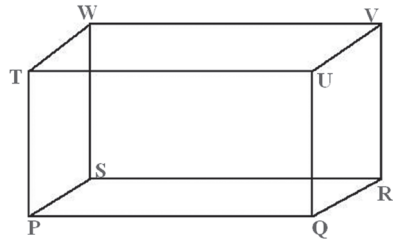
e. Jarak antara Dua Garis dan Dua Bidang yang Sejajar

Mari kita cermati gambar berikut ini.

Gambar 9.24 Dua garis sejajar, *k* dan *l* dipotong secara tegak lurus oleh garis *m*

Garis *k* dan *l* dikatakan sejajar jika jarak antara kedua garis tersebut selalu sama (konstan), dan jika kedua garis tidak berhimpit, maka kedua garis tidak pernah berpotongan meskipun kedua garis diperpanjang. *Nah*, sekarang kita akan memperhatikan rusuk-rusuk yang sejajar dalam suatu bangun ruang.

Misalnya, Balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 9.25, semua rusuk pasangan rusuk yang sejajar pasti sama panjang. Misalnya, rusuk *PQ* sejajar dengan *RS*, yang terletak pada bidang *PQRS*.

Lebih lanjut, bidang *PSTW* sejajar dengan bidang *QRVU*, dan jarak antara kedua bidang tersebut adalah panjang rusuk yang menghubungkan kedua bidang.

Rusuk *PQ* memotong rusuk *QU* dan *QR* secara tegak lurus, maka sudut segitiga *PQR* adalah 90°.

Gambar 9.25 Balok *PQRS.TUVW*

Uji Kompetensi 9.1

1 Diketahui kubus *PQRS.TUVW* dengan panjang rusuk 5 cm. Titik *A* adalah titik tengah RT. Hitunglah jarak antara
   a. titik *V* dan titik *A*!
   b. titik *P* dan *A*!
   c. titik *A* dan garis *SQ*!
   d. titik *Q* dan garis *RW*!
   e. titik *P* dan garis *RT*!

2. Diketahui balok *ABCD.EFGH* dengan *AB* = 4 cm, *BC* = 8 cm, dan *BF* = 10 cm. Hitunglah jarak antara
   a. titik *B* dan bidang *ACGE*!
   b. titik *G* dan bidang *CDEF*!

3. Garis *AB* dan *CD* sejajar dan berjarak 4 satuan. misalkan *AD* memotong *BC* di titik *P* di antara kedua garis. Jika *AB* = 4 satuan luas dan *CD* =12 satuan, berapa jauh titik *P* dari garis *CD*?

4. Diberikan persegi panjang *PQRS*. titik *Q* terletak di dalam *PQRS* sedemikian rupa sehingga *OP* = 3 cm, *OQ* = 12 cm. panjang *OR* adalah …

5. Tentukan jarak antara titik R dengan bidang *PWU* pada kubus *PQRS.TUVW*! Panjang rusuk kubus 12 cm.

6. Balok *ABCD.PQRS* memiliki rusuk alas *AB* = 4 cm, *BC* = $3\sqrt{2}$ cm, dan rusuk tegak *AP* = $2\sqrt{6}$ cm. Tentukan
   a. jarak antara *QR* dan *AD*!
   b. jarak antara *AB* dan *RS*!

Projek

Himpunlah permasalahan teknik bangunan, ekonomi, dan masalah nyata disekitarmu yang melibatkan titik, garis, bangun datar dan bangun ruang. Selidikilah sifat-sifat geometri di dalam permasalahan tersebut dan ujilah kebenarannya. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sudut pada Bangun Ruang

Jika kita memperhatikan sudut yang dibentuk oleh rusuk-rusuk pada kubus dan balok, semua sudut yang terbentuk adalah sebesar 90°, atau sudut siku-siku. Selanjutnya, pada subbab ini, kita akan mengkaji sudut yang terbentuk pada bangun lain misalnya limas atau kerucut.

Mari kita cermati masalah di bawah ini.

Masalah-9.7

Gambar 9.25 Gambar Candi Borobudur

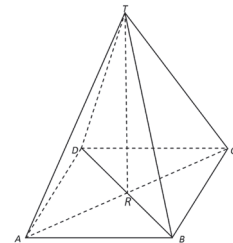
Candi Borobudur merupakan salah satu aset budaya Indonesia yang berharga dan terkenal. Mungkin, tujuan parawisata ini bukanlah sesuatu hal yang baru bagi kamu. Tetapi, tahukah kamu ukuran candi tersebut? Ternyata, luas bangunan candi adalah 123 m × 123 m dengan tinggi bangunan 34,5 m dan memiliki 1460 relief, 504 Arca Buddha, serta 72 stupa. Candi Borobudur memiliki 10 tingkat (melambangkan sepuluh tingkatan *Bodhisattva* yang harus dilalui untuk mencapai kesempurnaan menjadi Buddha) terdiri dari 6 tingkat berbentuk bujur sangkar, 3 tingkat berbentuk bundar melingkar, dan sebuah stupa utama sebagai puncaknya.

Alternatif Penyelesaian

Jika kita mengamati kerangkanya, candi tersebut berbentuk limas persegi, seperti yang diilustrasikan berikut ini.

Gambar 9.26 Limas *T.ABCD*

Karena alas Candi Borobudur berbentuk persegi, maka panjang $AB = BC = CD = AD = 123$ m, dan tinggi candi, yaitu 34,5 m atau $TR = 34{,}5$ m.

Garis tinggi TR memotong diagonal AC dan DB secara tegak lurus. Oleh karena itu, pada segitiga TAR berlaku

$TR^2 + AR^2 = TA^2$, 20 dengan $AR = \frac{123\sqrt{2}}{2}$ m dan TR = 34,5 m, sehingga diperoleh:

$$TA^2 = \left(\frac{123\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (34,5)^5$$

$$TA^2 = 11346.75 + 1190,25 = 12537$$

$$TA\ = \sqrt{12537} = 111,968 \approx 112 \text{ m.}$$

Karena bidang *ABCD* merupakan persegi, berlaku bahwa $TA = TB = TC = TD$ = 112 m. Selanjutnya, untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh TA terhadap bidang alas, mari kita perhatikan segitiga TAR. Dengan menggunakan perbandingan cosinus, berlaku

$$\cos A = \frac{AR}{TA} = \frac{61,5\sqrt{2}}{112} = 0,77.$$

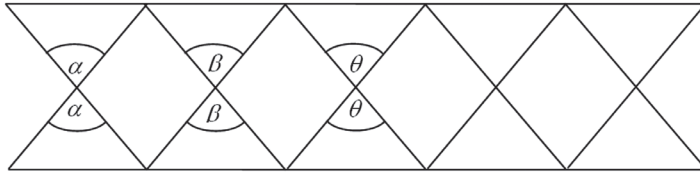
Dengan menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, nilai arcos A = 395°.
Jelasnya besar sudut *TAR*, *TBR*, *TCR* , dan *TDR* adalah sama besar, yaitu 395°.
Jadi, sudut kemiringan yang dibentuk sisi miring dari dasar candi ke puncak candi adalah sebesar 395°.
Sedangkan besar sudut yang terbentuk di puncak candi, dapat kita tentukan dengan menentukan besar sudut *ATR* pada segitiga siku-siku *TAR*. Dengan menggunakan perbandingan tangen, dinyatakan

$$\tan \angle ATR = \frac{AR}{TR} = \frac{61,5\sqrt{2}}{34,5} = 2,52.$$

Nilai arctan $\angle ATR$ = 68,35°.
Jelasnya, besar $\angle BTR = \angle CTR = \angle DTR \approx$ 68,35°.
Jadi besar sudut dipuncak candi merupakan $\angle ATC$ atau besar $\angle BTD$, yaitu sebesar 2.($\angle ATR$) = 136,7°.

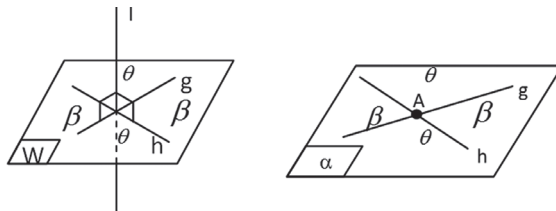
Perhatikan Ilustrasi berikut!

Gambar di samping menunjukkan kondisi sebuah jembatan dengan kerangka besi.
Susunan besi-besi pada jembatan membentuk sudut-sudut. Jika keadaan tersebut, ditungkan dalam kajian geometris, sudut-sudut terbentuk diilustrasikan sebagai berikut.

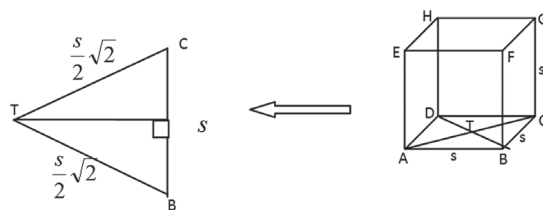
Gambar 9.27 Jembatan dengan tiang penyangga besi

Gambar 9.28 Ilustrasi beberapa dua garis berpotong menghasilkan sudut yang sama besar

Pada satu bidang, hasil perpotongan satu garis berwarna hitam dengan satu garis berwarna, menghasilkan dua sudut yang masing-masing besarnya sama. Hubungan kedua sudut yang sama besar ini disebut dua sudut yang bertolak belakang.

Secara umum, dapat kita tuliskan sifat-sifat sudut yang dihasilkan dua garis dalam bidang sebagai berikut.

> **Sifat dua garis dalam satu bidang yang sama**
> Misalkan garis *k* dan garis *l* berpotongan secara sembarang, maka pasangan sudut yang dihasilkan (ada dua pasang) besarnya sama.

Contoh 9.7

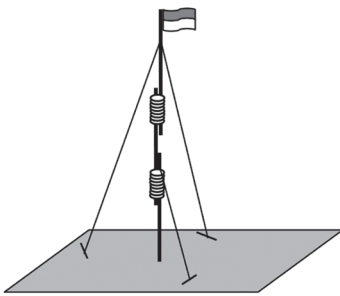
Tentukanlah besar sudut yang dibentuk diagonal bidang *ABCD* pada suatu balok *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *s* cm.

Penyelesaian

Cermati segitiga *BTC*, dengan menggunakan perbandingan sinus bahwa:

$$Sin\ B = \frac{TS}{TB} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{s}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

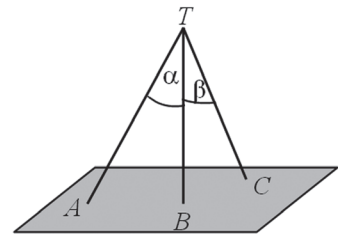
Maka arcsin $B = 45°$, artinya besar sudut $B = 45°$. Karena $TB = TC$, maka besar sudut $C = 45°$. Akibatnya, besar sudut $BTC = 90°$.
Meskipun terdapat 4 segitiga yang terbentuk pada bidang alas kubus *ABCD.EFGH*, kondisinya berlaku sama untuk setiap sudut yang terkait titik perpotongan diagonal bidang *ABCD*.

a. Sudut antara Dua Garis dalam Ruang

Ilustrasi.

Gambar 9.29 Tiang bendera

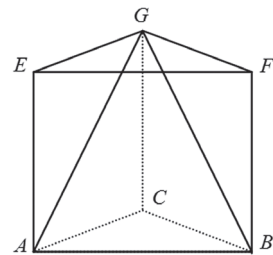
Satu tim pramuka membuat tiang bendera dari tiga tongkat dan tali pandu. Tiang bendera tersebut disambung dan diikat menjadi sebuah tiang. Tiang tersebut berdiri tegak dengan bantuan tali yang diikat pada tongkat dan ditarik dengan kuat ke pasak yang sudah ditancapkan ke tanah ketiga arah. Perhatikan Gambar 9.29.

- *Minta siswa untuk memisalkan tiang bendera dan tali merupakan sebuah garis. Gambar 9.18 dapat disketsa kembali dengan lebih sederhana. Minta siswa untuk memperhatikan Gambar 9.30.*

TB adalah tiang bendera dengan *TC* dan *TA* adalah tali pandu. Dari Gambar 9.30, jelas kita lihat bahwa sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TA* adalah α dan sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TC* adalah β.

Gambar 9.30 Sudut pada 2 garis

Contoh 9.8

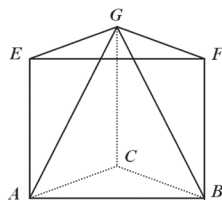
Sebuah prisma segitiga *ABC.EFG* dengan alas berupa segitiga sama sisi *ABC* dengan sisi 6 cm dan panjang rusuk tegak 10 cm. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk:

a. Garis *AG* dan garis *BG*!
b. Garis *AG* dan garis *AB*!

Gambar 9.31 Prisma segitiga *ABC.EFG*

Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 9.31

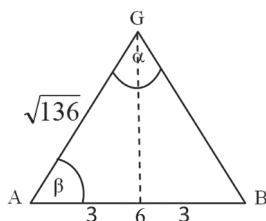
$AB = BC = AC = 6$ cm

$AE = BF = CG = 10$ cm

Perhatikan segitiga AEG siku-siku di E sehingga dengan teorema phytagoras:

$$AG = \sqrt{AE^2 + EG^2}$$

$$AG = \sqrt{100 + 36}$$

$$AG = \sqrt{136}$$

Perhatikan segitiga sama kaki AGB.

Dengan perbandingan nilai cosinus, diperoleh:

$$\cos \beta = \frac{AG^1}{AG} = \frac{3}{\sqrt{136}}$$

$$= 0{,}257247878$$

$$\beta = \text{arc cos } 0{,}257247878$$

$$= 75{,}09°$$

Karena ΔABG adalah segitiga sama kaki, maka nilai α adalah sebagai berikut.

$\angle AGB = \alpha = 180 - 2\ \angle GAB$

$= 180 - 2\beta$

$= 180 - 2(75{,}09)$

$= 360 - 150{,}18$

$= 29{,}82$

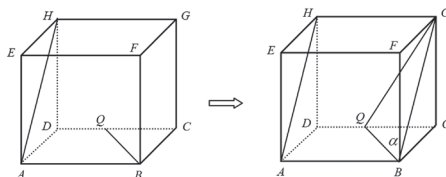
Berarti besar sudut α adalah 29,82°.

Contoh 9.9

Perhatikan gambar! Pada balok $ABCD.EFGH$, titik Q di tengah CD. Jika panjang AB = 12 cm, BC = 8 cm dan CG = 8 cm. Berapakah besar sudut antara garis AH dan BQ?

Penyelesaian

Perhatikan gambar!

Untuk mendapatkan sudut yang dibentuk oleh garis AH dan BQ, kita perlu menggeser garis AH sepanjang rusuk EF sehingga garis

Gambar 9.32 Kubus ***ABCD.EFGH***

AH dapat diwakili garis BG. Sudut yang dibentuk adalah α.

Perhatikan segitiga BCQ, siku-siku di C; $BC = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

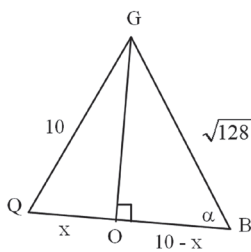
$$BQ = \sqrt{BC^2 + CQ^3} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Perhatikan segitiga BFG, siku-siku di F; $BF = 8$; $FG = 8$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$$

Perhatikan segitiga QCG, siku-siku di C; $CG = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$QG = \sqrt{QC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Perhatikan segitiga QBG dengan α adalah sudut garis QB dan BG.
Dengan teorema phytagoras pada segitiga siku-siku QOG dan BOG,

$$\sqrt{QG^2 - QO^2} = \sqrt{BG^2 - BO^2}$$
$$\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{128 - (10 - x)^2}$$
$$100 - x^2 = 128 - (10 - x)^2$$
$$100 - x^2 = 128 - 100 + 20x - x^2$$
$$100 = 28 + 20x$$
$$72 = 20x \text{ atau } x = 3,6$$

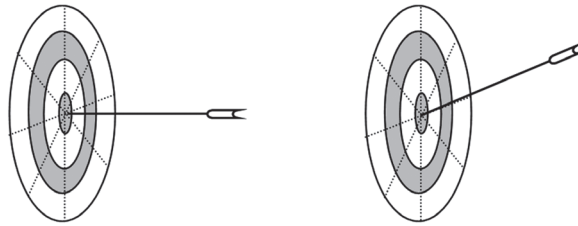
Perhatikan segitiga BOG siku-siku di O, sehingga:

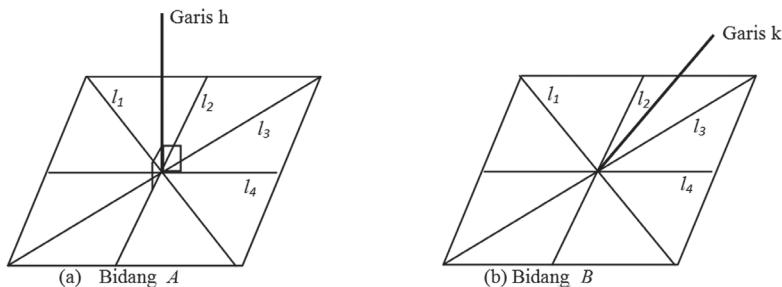
$$\cos\alpha = \frac{10 - x}{\sqrt{128}} = \frac{6,4}{\sqrt{128}} \approx 0,57 \text{ atau } \alpha = \text{arccos } (0,57) = 55,55^o.$$

b. Sudut antara Garis dan Bidang pada Bangun Ruang

- *Minta siswa untuk memahami Ilustrasi berikut!*

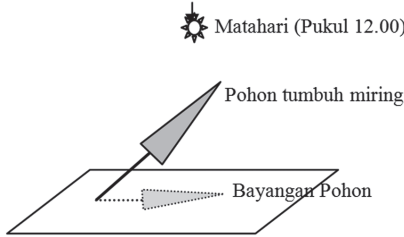
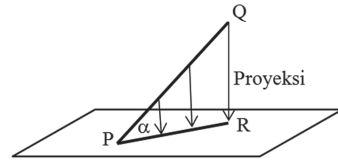
Ilustrasi 1

Dua orang pemanah sedang latihan memanah di sebuah lapangan. Kedua pemanah tersebut berhasil memanah tepat pada sasaran. Masing-masing anak panah menancap tepat di pusat sebuah bidang sasaran seperti pada Gambar 9.33 berikut!

Gambar 9.33 Anak panah

- Tanyakan kepada siswa, bagaimana pengamatannya terhadap ilustrasi tersebut? Harapan jawabannya yaitu siswa mengatakan kedua anak panah menancap tepat pada sasaran yaitu pada pusat bidang.
- Kemudian berikan pertanyaan lagi gar siswa memperhatikan posisi kedua anak panah tersebut terhadap bidang. Diharapkan siswa memahami bahwa posisi kedua anak panah tersebut tentu sangat berbeda.
- Berikan penjelasan kepada siswa dengan memisalkan anak panah tersebut adalah sebuah garis dan papan target anak panah adalah sebuah bidang (sebut bidang A dan B serta garis h dan k) sehingga diilustrasikan kembali posisi anak panah tersebut seperti gambar berikut.

Gambar 9.34 Perpotongan garis dengan bidang di satu titik

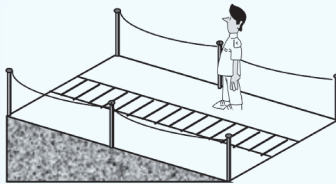
Dengan demikian, anak panah yang menancap pada bidang adalah sebuah ilustrasi bahwa sebuah garis dapat memotong sebuah bidang di satu titik. Perhatikan Gambar 9.34 (a), garis h selalu tegak lurus terhadap semua garis yang ada pada bidang, sehingga garis h disebut tegak lurus terhadap bidang. Garis yang tegak lurus pada bidang, kita sebut membentuk sudut 90° terhadap bidang. Perhatikan Gambar 9.34 (b). Garis k tidak tegak lurus terhadap bidang atau garis k tidak membentuk sudut 90° terhadap bidang tetapi membentuk sudut yang lain dengan bidang. Dapatkah anda menentukan besar sudut yang lain tersebut? Mari kita pelajari ilustrasi berikut.

Ilustrasi 2

Perhatikan gambar!

Gambar 9.35 Bayangan pohon miring

Gambar 9.36 Proyeksi *PQ* ke bidang

Sebuah pohon tumbuh miring di sebuah lapangan. Pada siang hari pada pukul 12.00, matahari akan bersinar tepat di atas pohon tersebut sehingga bayangan pohon tersebut merupakan projeksi orthogonal pada lapangan. Misalkan garis PQ adalah pohon sehingga projeksi PQ adalah PR seperti gambar. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh PQ dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dengan proyeksinya pada bidang tersebut yaitu sudut QPR. Pada Gambar 9.35 disebut sudut α.

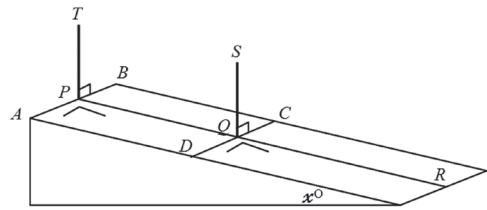
- *Minta siswa untuk memahami Masalah 9.8.*

Masalah-9.8

Gambar 9.37 Bidang miring

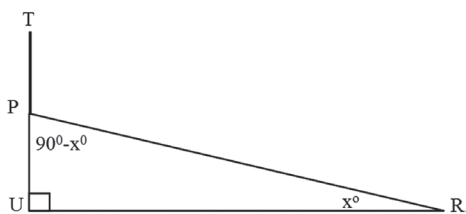
Perhatikan tangga berikut. Seorang bapak sedang berdiri di tangga dengan kemiringan x^0. Dapatkah kamu tentukan sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan bidang miring?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa bidang miring tersebut.

Misalkan PT atau QS adalah tinggi badan bapat tersebut. Kita ambil sebuah garis DC atau AB sedemikian PT tegak lurus dengan AB atau QS tegak lurus dengan DC.

Gambar 9.38 Sketsa sederhana bidang miring 1

Perhatikan juga bahwa garis PR terletak pada bidang sehingga PR tegak lurus dengan PT ataupun pada QS. Dengan demikian garis PR akan mewakili bidang miring tersebut. Sudut yang dibentuk badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring akan diwakili oleh sudut yang dibentuk oleh garis PT dengan garis PR. Kita sederhanakan kembali sketsa di atas.

Gambar 9.39 Sketsa sederhana bidang miring

Perhatikan segitiga PUR dengan siku-siku di U atau sudut U adalah 90°.

$\angle UPR + \angle PUR + \angle PRU = 180°$

$\angle UPR + 90° + x° = 180°$

$\angle UPR = 90° - x°$

Perhatikan bahwa sudut TPR adalah pelurus dengan sudut UPR sehingga:

$\angle TPR + \angle UPR = 180°$

$\angle TPR + 90° - x° = 180°$

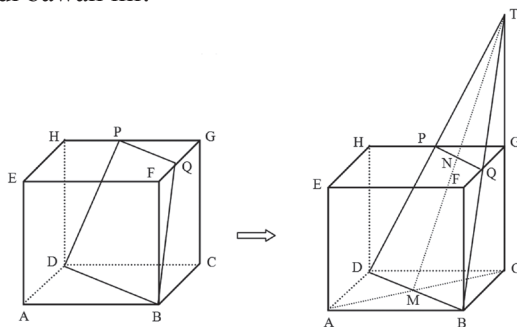
$\angle TPR = 90° - x°$

Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan permukaaan bidang miring adalah $90° + x°$.

 Contoh 9.10

Pada kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 12 cm. Titik P di tengah rusuk GH dan titik Q di tengah FG. Tentukanlah sudut antara garis CG dengan bidang $BDPQ$.

Penyelesaian

Perhatikan gambar di bawah ini!

Gambar 9.40 Kubus *ABCD.EFGH*

Jika kita perpanjang garis BQ, CG, dan DP maka ketiga garis akan berpotongan di satu titik T. Perhatikan segitiga sama kaki TBD. TM adalah garis tinggi.
Kamu tentu masih ingat konsep kesebangunan bukan. Perhatikan kesebangunan antara segitiga TBC dengan segitiga TQG, yaitu:

$$\frac{TG}{TC} = \frac{GQ}{CB} \text{ atau } \frac{TG}{TG+GC} = \frac{GQ}{CB} \Leftrightarrow \frac{TG}{TG+12} = \frac{6}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2TG = TG + 12$$

$$\Leftrightarrow TG = 12$$

Perhatikan segitiga ABC, siku-siku di B

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad \text{atau} \quad AC = \sqrt{12^2 + 12^2}$$

$$AC = \sqrt{12^2 \times 2}$$

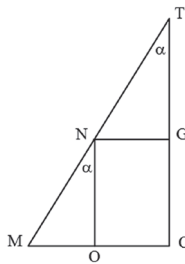
$$AC = 12\sqrt{2}$$

$$\text{sehingga } CM = \frac{AC}{2} = 6\sqrt{2}$$

Perhatikan segitiga TCM, siku-siku di C

$$TM = \sqrt{TC^2 + CM^2} \text{ atau } TM = \sqrt{(24)^2 + (6\sqrt{2})^2}$$

$$TM = \sqrt{576 + 72}$$

$$TM = \sqrt{648}$$

Perhatikan segitiga TBD berpotongan dengan garis TC di titik T sehingga sudut yang dibentuk TBD dan garis TC adalah α. Kemudian perhatikan segitiga TCM, tan $\alpha = \frac{MO}{ON} = \frac{CM}{TC} \tan\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Dengan menggunakan kalkulator maka

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = 19,5°$$

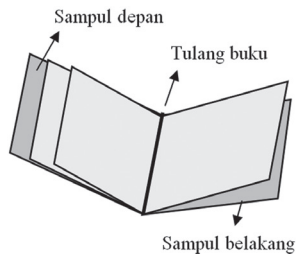
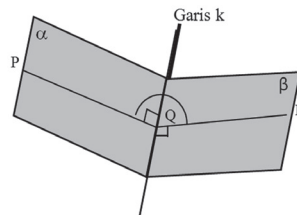
Selain dicari dengan tan, coba kamu cari dengan sin dan cos, apakah hasilnya sama?

c. Sudut antara Dua Bidang pada Bangun Ruang

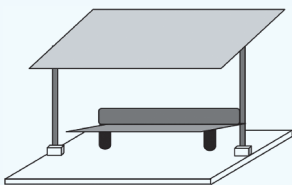
Pada sub-bab ini, kita akan mencoba menemukan konsep sudut antara dua bidang pada bangun ruang. Marilah kita mengamati dan mempelajari ilustrasi berikut.

Ilustrasi 3

Perhatikan gambar buku berikut. Sebuah buku terdiri dari beberapa halaman terbuka seperti Gambar 9.41. Kumpulan tersebut sering disebut dengan berkas. Halaman per halaman merupakan bentuk dari sebuah bidang. Misalkan saja, kita ambil sampul buku depan dengan sampul belakang. Kita sebut sampul buku depan adalah bidang α dan sampul buku belakang adalah bidang β. Tentu saja anda sudah mengerti bahwa buku memiliki tulang buku, dan tulang buku tersebut dimisalkan dengan sebuah garis k.

Perhatikan gambar.

Gambar 9.41 Buku **Gambar 9.42 Berkas atau buku**

Berdasarkan gambar di atas, kedua sampul buku berpotongan di tulang buku atau bidang α dan bidang β berpotongan di garis k. Perhatikan bahwa garis PQ tegak lurus dengan garis k dan garis RQ tegak lurus juga dengan garis k. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh bidang α dan bidang β adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dan RQ.

Masalah-9.9

Sebuah halte berbentuk seperti Gambar 9.43.
Jika atap halte dibuat tidak sejajar dengan lantai maka dapatkah anda tentukan sudut yang dibentuk oleh atap dan lantai halte tersebut.

Gambar 9.43 Halte

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa gambar tersebut.

Gambar 9.44 Sketsa sederhana halte

Pengamatan kita terfokus pada bidang atap dan lantai. Kita sebut saja bidang lantai adalah bidang α dan bidang β. Karena bidang atap tidak dibangun sejajar maka sudah pasti bahwa kedua bidang pasti berpotongan dan membentuk sudut walaupun secara visual, kedua bidang tidak bersentuhan. Untuk mendapatkan garis perpotongan kedua bidang maka kita dapat memperpanjang rusuk-rusuk kedua bidang. Perhatikan gambar di sebelah kanan anda.
Rusuk *AE* diperpanjang menjadi *AP*
Rusuk *BF* diperpanjang menjadi *BP*
Rusuk *DH* diperpanjang menjadi *DQ*
Rusuk *CG* diperpanjang menjadi *CQ*
Dari gambar dapat kita lihat, garis *PQ* adalah perpotongan kedua bidang. Garis *ST* tegak lurus dengan *PQ* dan garis *UT* juga tegak lurus dengan *PQ*. Dengan demikian, sudut antara bidang α dan bidang β adalah φ.

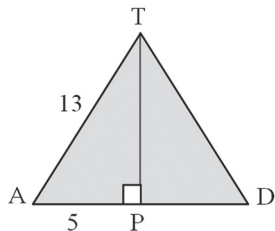
Contoh 9.11

Sebuah limas *T.ABCD*, dengan panjang *TA* = 13, *AB* = 12, *CD* = 10. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh bidang *TAD* dengan bidang *TBC*, tentukanlah besar α.

Penyelesaian

Gambar 9.45 Limas *T*.ABCD

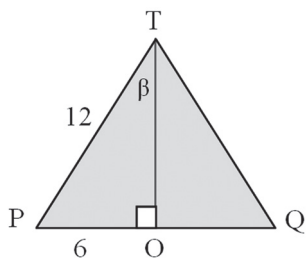
Bidang *TAD* dan bidang *TBC* berpotongan pada titik *T*. Garis tinggi *TAD* adalah *TP* dan garis tinggi *TBC* adalah *TQ* sehingga sudut yang dibentuk oleh bidang *TAD* dan bidang *TBC* diwakili oleh garis tinggi *TP* dan *TQ* sehingga sudut yang dibentuk oleh kedua bidang adalah sudut α.

Kemudian, kita akan mencari besar sudut α sebagai berikut.
Perhatikan segitiga *TAD*.

Dengan menggunakan teorema Phytagoras, maka:

$$TP = \sqrt{TA^2 - AP^2}$$

$$TP = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$TP = \sqrt{144} = 12$$

Perhatikan segitiga TPQ.

Dengan menggunakan perbandingan sinus, maka:

$$\sin\beta = \frac{PO}{TP} = \frac{6}{12}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \text{ atau } \beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

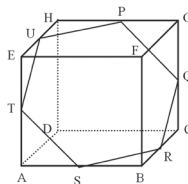
Dengan demikian sudut α = 2β atau α = 60°.

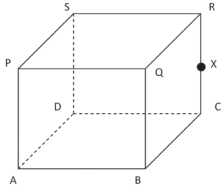
Uji Kompetensi 9.2

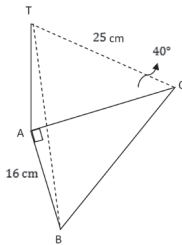
1 Sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *p* cm. Tentukanlah sudut antar bidang *ACH* dengan bidang *ACF*.

2. Pada kubus *ABCD.EFGH*. Jika *AP* adalah perpanjangan rusuk *AB* sehingga *AB* : *BP* = 2 : 1 dan *FQ* adalah perpanjangan *FG* sehingga *FP* : *FG* = 3 : 2 maka tentukanlah jarak antara titik *P* dan *Q*.

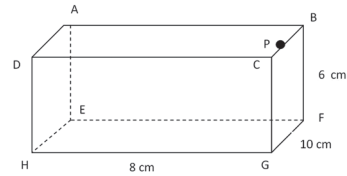
3. Pada kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *a* cm. Tentukanlah jarak bidang *ACH* dengan bidang *BEG*.

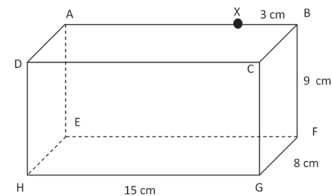
4. Perhatikan gambar berikut.

Tentukanlah besar sudut yang dibentuk oleh bidang *PQRSTU* dengan alas *ABCD*. (Rusuk kubus *p* cm, untuk *p* bilangan real positif).

5. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 12 cm. Titik X berada di tengah rusuk CR. Hitunglah:

   a. Panjang AX
   b. Besar sudut antara AX dan bidang alas
   c. Besar sudut PXA
   d. Besar sudut antara BS dan bidang alas

6. Segitiga ABC adalah segitiga yang terletak pada sebuah bidang datar, dengan sudut $BAC = 90°$ dan panjang AB =16 cm. Titik T terletak tepat di atas titik A. Sudut yang terbentuk antara TC dan AC adalah 40°, panjang TC adalah 25 cm.

   Hitunglah:
   a. Sudut yang terbentuk antara TB dan AB
   b. Panjang AT
   c. Panjang BC

7. Sebuah balok $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk-rusuk AB = 6 cm, AD = 8 cm, BD = 10 cm, dan DH = 24 cm. Hitunglah
   a. Panjang HB
   b. Besar sudut BDC
   c. Besar sudut antara HB dan bidang $CDHG$
   d. Besar sudut antara HB dan bidang $ABCD$

8. Perhatikan gambar balok berikut

   Hitunglah :
   a. Panjang HP jika P adalah tengah-tengah BC
   b. Besar sudut antara HP dan $EFGH$
   c. Besar sudut antara HP dan FG
   d. Besar sudut antara DF dan bidang $EFGH$

9. Gambar di bawah ini merupakan balok dengan alas $EFGH$, dengan panjang HG = 15 cm, GF = 8 cm dan BF = 9 cm. Titik X berada pada rusuk AB yang berjarak 3 cm dari titik B. Hitunglah besar sudut HXG dan $ABFE$.

10. Sebuah limas berdiri setinggi 26 cm di atas bidang datar dengan alas berbentuk bidang segi enam

beraturan yang memiliki panjang rusuk 12 cm. Hitunglah

a. Panjang rusuk dari piramid
b. Besarnya sudut antara rusuk piramid dengan alas.

11. Jika diketahui balok *ABCD.EFGH* dengan $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$ dan $BF = 5$. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk bidang *ADHE* dan bidang BDHF.

12. Pada limas beraturan *T.ABCD*, $TA = TB = TC = TD = \sqrt{3}$ dm dan *ABCD* adalah persegi dengan sisi dm. Tentukanlah besar sudut antara bidang *TAB* dan bidang *TCD*.

13. Seorang pengamat mengamati dua buah perahu dari menara merkusuar. Perahu *A* bergerak ke arah Barat dengan sudut depresi 35° dan perahu *B* bergerak ke arah Utara dengan sudut depresi 40°. Jika tinggi merkusuar adalah 85 m dari permukaan laut, tentukan jarak antara kedua perahu tersebut.

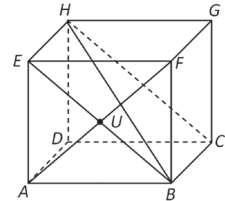
14. Seorang lelaki berdiri di titik *B*, yang berada di Timur menara *OT* dengan sudut elevasi 40°. Kemudian ia berjalan 70 m ke arah Utara dan menemukan bahwa sudut elevasi dari posisi yang baru ini, *C* adalah 25°. Hitunglah panjang *OB* dan tinggi menara tersebut.

Projek

Perhatikan berbagai objek yang kamu temui di sekelilingmu. Pilihlah minimal tiga objek dan rancang masalah yang pemecahannya menerapkan sifat dan rumus jarak titik ke garis atau jarak titik ke bidang. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Pada kubus $ABCD.EFGH$, berlaku.

1. Titik E terletak pada garis AE, EF, dan EH.
2. Garis EF terletak pada bidang $ABFE$ dan $EFGH$.
3. Titik E terletak pada bidang $ABFE$, $AEHD$, $EFGH$ yang memuat garis AE, EF, dan EH.
4. Garis EF dan garis CD adalah dua garis yang sejajar.
5. Garis AF dan garis BE adalah dua garis yang bersilangan.
6. Garis EF dan CG adalah dua garis yang saling tegak lurus.
7. Garis EF sejajar dengan salah satu garis pada bidang $CDHG$, maka garis EF sejajar dengan bidang $CDGH$.
8. Garis EF tegak lurus dengan salah satu garis pada bidang $BCGF$, maka garis EF tegak lurus dengan bidang $BCGF$.
9. Bidang $ADHE$ berpotongan dengan bidang $BCHE$.
10. Bidang $ABFE$ berpotongan tegak lurus dengan bidang $ABCD$.
11. Bidang $ABFE$ sejajar dengan bidang $CDHG$.
12. Garis AF merupakan diagonal bidang $ABFE$
13. Garis BH merupakan diagonal ruang kubus $ABCD$, $EFGH$.
14. Bidang $BCHE$ merupakan bidang diagonal.
15. $\angle AUE = \angle BUF$ dan $\angle AUB = \angle EUF$.
16. Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut.
17. Jarak antara sebuah titik ke sebuah garis adalah jarak titik ke proyeksinya pada garis.
18. Jarak antara sebuah titik ke sebuah bidang adalah jarak titik ke proyeksinya pada bidang.
19. Jarak antara dua garis sejajar adalah jarak salah satu titik di salah satu garis ke garis yang lain.
20. Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis yang tegak lurus pada kedua garis tersebut.
21. Jarak antara dua bidang yang sejajar adalah jarak dari salah satu titik pada bidang yang satu ke bidang yang lain.

22. Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan projeksinya pada bidang.

Kita telah mempelajari materi geometri tentang jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang serta penerapannya dalam pemecahan masalah nyata. Selanjutnya kita akan membahas materi tentang limit fungsi. Dalam bahasan ini kita akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi aljabar yang selanjutnya akan diuraikan dalam pemecahan masalah dan penyelesaian beberapa masalah dengan menggunakan beberapa sifat limit fungsi yang dipelajari.

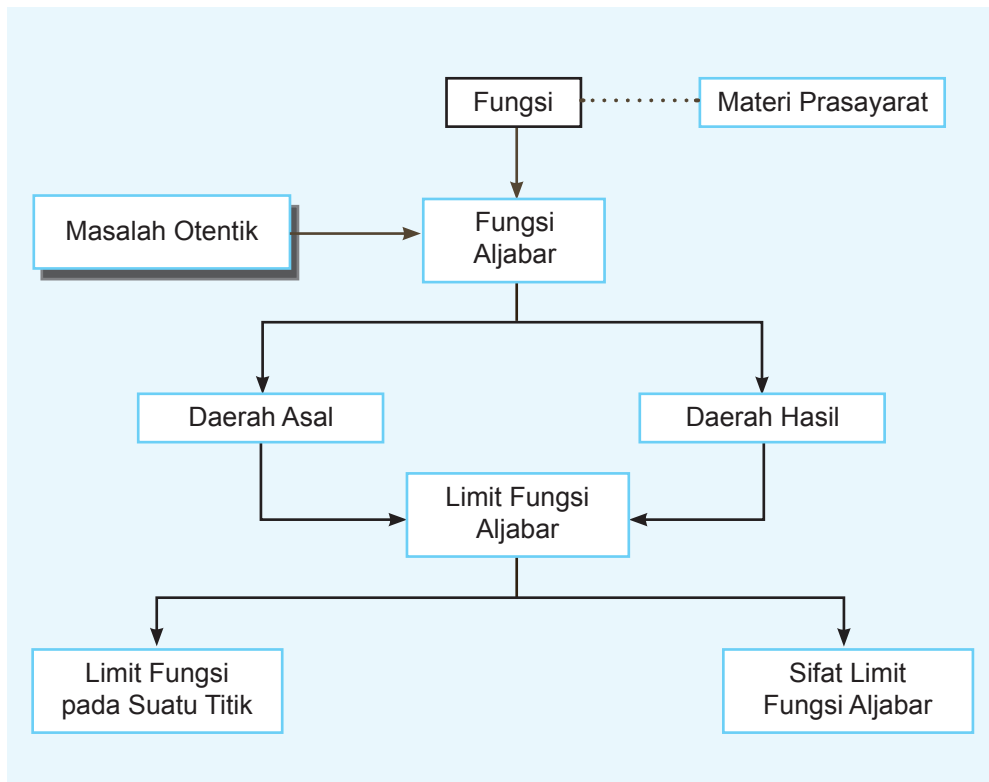
Limit Fungsi

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. memahami konsep limit fungsi aljabar dengan menggunakan konteks nyata dan menerapkannya; 4. merumuskan aturan dan sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan contoh-contoh; 5. memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang limit fungsi aljabar.	Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mampu berpikir kreatif; • mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan; • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep; • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan; • mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari; • siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- *Limit fungsi*
- *Pendekatan (kiri dan kanan)*
- *Bentuk tentu dan tak tentu*
- *Perkalian sekawan*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisa data dan menarik kesimpulan. Perhatikan dan amatilah contoh ilustrasi berikut.

Ilustrasi

Gambar 10.1 Jalan Tol

Seorang Satpam berdiri mengawasi mobil yang masuk pada sebuah jalan tol. Ia berdiri sambil memandang mobil yang melintas masuk jalan tersebut. Kemudian dia memandang terus mobil sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut.

- *Arahkan siswa melihat Gambar: 10.1 dan memberikan waktu untuk mengamati gambar tersebut. Bantu mereka untuk berani memberikan komentar kenapa obyek pada gambar seakan-akan mengecil? Arahkan mereka mengingat kembali perbandingan pada kesebangunan.*

Jika kita analisis lebih lanjut, untuk pendekatan berapa meterkah jauhnya mobil melintas agar penjaga pintu masuk jalan tol sudah tidak dapat melihatnya lagi? Berdiskusilah dengan teman-temanmu!

1. Menemukan Konsep Limit Fungsi

Kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep pendekatan suatu titik ke titik yang lain dengan mengamati dan memecahkan masalah.

Masalah-10.1

Perhatikan masalah berikut.

Gambar 10.2 Lebah

Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah pada sebuah lapangan. Pada suatu saat, lebah tersebut diamati terbang membentuk sebuah lintasan parabola. Setelah terbang selama 1 menit, lebah tersebut telah mencapai ketinggian maksimum sehingga ia terbang datar setinggi 5 meter selama 1 menit.

Pada menit berikutnya, lebah tersebut terbang menukik lurus ke tanah sampai mendarat kembali pada akhir menit ketiga.

- Coba kamu modelkan fungsi lintasan lebah tersebut!

  Petunjuk:

  – Model umum kurva parabola adalah $f(t) = at^2 + bt + c$, dengan a, b, c bilangan real.

  – Model umum kurva linear adalah $f(t) = mt + n$ dengan m, n bilangan real.

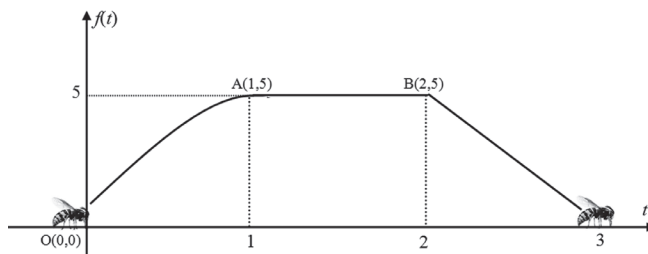
- Amatilah model yang kamu peroleh. Tunjukkanlah pola lintasan terbang lebah tersebut?

  Petunjuk:

  Pilihlah strategi numerik untuk menunjukkan pendekatan, kemudian bandingkan kembali jawaban kamu dengan strategi yang lain.

- Cobalah kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar dari ilustrasi Masalah 10.2

Gambar 10.3 Ilustrasi gerakan lebah

Jadi, model fungsi lintasan lebah tersebut berdasarkan gambar di atas adalah:

$$f(t)=\begin{cases} at^2+bt+c & \text{jika} \quad 0\le t\le 1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1\le t\le 2 \\ mt+n & \text{jika} \quad 2\le t\le 3 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dengan a, b, c, m, n bilangan real.

Dari ilustrasi, diperoleh data sebagai berikut.

- Misalkan posisi awal lebah pada saat hinggap di tanah adalah posisi pada waktu $t = 0$ dengan ketinggian 0, disebut titik awal $O(0,0)$,
- Kemudian lebah terbang mencapai ketinggian maksimum 5 meter pada waktu $t = 1$ sampai $t = 2$, di titik $A(1,5)$ dan $B(2,5)$.
- Pada akhir waktu $t = 2$, lebah kembali terbang menukik sampai hinggap kembali di tanah dengan ketinggian 0, di titik $C(3,0)$.

Berdasarkan data tersebut, kita akan menentukan fungsi lintasan lebah, dengan langkah-langkah berikut.

1. Substitusi titik $O(0,0)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh
2. Substitusi titik $A(1,5)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $a + b + c = 5$ atau $a + b = 5$.
3. Karena fungsi kuadrat mencapai maksimum pada saat $t = 1$ maka $\dfrac{-b}{2a} = 1$ atau $b = -2a$.
4. Dengan mensubstitusi $b = -2a$ ke $a + b = 5$ maka diperoleh $a = -5$ dan $b = 10$.
5. Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah $f(t) = -5t^2 + 10t$.
6. Lebah tersebut terbang konstan pada ketinggian 5 maka fungsi lintasan tersebut adalah $f(t) = 5$.
7. Substitusi titik $B(2,5)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $5 = 2m + n$.
8. Substitusi titik $C(3,0)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $0 = 3m + n$ atau $n = -3m$.
9. Dengan mensubstitusi $n = -3m$ ke $5 = 2m + n$ maka diperoleh $m = -5$ dan $n = 15$.
10. Fungsi linear yang dimaksud adalah $f(t) = -5t + 15$.

Dengan demikian, model fungsi lintasan lebah tersebut adalah:

$$f(t)=\begin{cases} -5t^2+10t & \text{jika} \quad 0\le t\le 1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1\le t\le 2 \\ -5t+15 & \text{jika} \quad 2\le t\le 3 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Selanjutnya limit fungsi pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 10.1 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	5	5	5	5	5	5

Tabel 10.2 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
$f(t)$	5	5	5	5	5	5	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Dari pengamatan pada tabel, dapat kita lihat bahwa y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 2.
Perhatikan strategi lainnya. Mari perhatikan nilai fungsi pada t mendekati 1 dari kiri dan kanan, sebagai berikut:

I. Untuk t mendekati 1

$\lim\limits_{t\to 1^-} -5t^2 + 10t = 5$ (makna $t \to 1^-$ adalah nilai t yang didekati dari kiri)

$\lim\limits_{t\to 1^+} 5 = 5$ (makna $t \to 1^+$ adalah nilai t yang didekati dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 1 dari kiri , nilai fungsi $y = f(t) = -5t^2 + 10t$ mendekati 5. Demikian saat t mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Kita menulisnya $\lim\limits_{t\to 1^-} -5t^2 + 10t = 5 = \lim\limits_{t\to 1^+} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1.

II. Untuk t mendekati 2

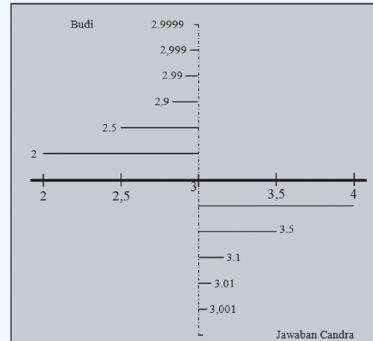
$\lim\limits_{t\to 2^-} 5 = 5$ (makna $t \to 2^-$ adalah nilai t yang didekati dari kiri)

$\lim\limits_{t\to 2^+} -5t + 15 = 5$ (makna $t \to 2^+$ adalah nilai t yang didekati dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Demikian juga saat t mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi $y = f(t) = -5t + 15$ mendekati 5. Hal ini dapat dinyatakan $\lim\limits_{t\to 2^+} 5 = \lim\limits_{t\to 2^-} -5t^2 + 10t = 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2.

Masalah-10.2

Tiga anak (sebut nama mereka: Ani, Budi dan Candra) sedang bermain tebak angka. Ani memberikan pertanyaan dan kedua temannya akan berlomba memberikan jawaban yang terbaik. Perhatikanlah percakapan mereka berikut.

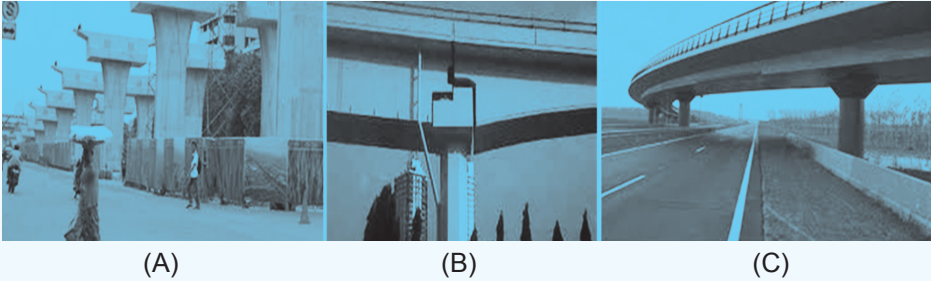
Ani : **Sebutkanlah bilangan real yang paling dekat ke 3?**
Budi : 2
Candra : 4
Budi : 2,5
Candra : 3,5
Budi : 2,9
Candra : 3,1
Budi : 2,99
Candra : 3,01
Budi : 2,999
Candra : 3,001
Budi : 2,9999
Candra : 3,0001

Gambar 10.4 Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Alternatif Penyelesaian

Kedua teman Ani berlomba memberikan jawaban bilangan terdekat ke 3, seperti pada Gambar 10.4. Pada awalnya Budi dan Candra mengambil bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan sehingga mereka menjawab 2 dan 4. Ternyata masih ada bilangan real lain yang terdekat ke 3, sehingga Budi harus memberi bilangan yang lebih dekat lagi ke 3 dari kiri, maka Budi menyebut 2,5. Hal ini membuat Candra ikut bersaing untuk mencari bilangan lain, sehingga ia menjawab 3,5. Demikianlah mereka terus-menerus memberikan jawaban sebanyak mungkin sampai akhirnya mereka menyerah untuk mendapatkan bilangan-bilangan terdekat ke-3.

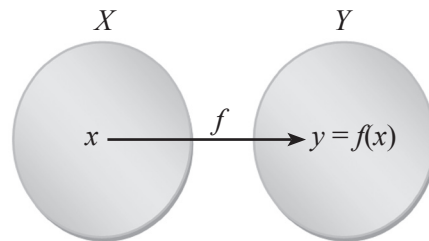
Berdasarkan pemahaman kasus ini, ternyata ketidakmampuan teman-teman Ani untuk menyebutkan semua bilangan tersebut telah membuktikan bahwa begitu banyak bilangan real di antara bilangan real lainnya. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan jawaban-jawaban Budi dan Candra maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 (secara matematika, dituliskan $x \to 3$).

Masalah-10.3

(A) (B) (C)

Gambar 10.5 Jembatan layang

Kata limit dapat dipandang sebagai nilai batas. Perhatikan ilustrasi berikut. Sebuah jembatan layang dibangun pada sebuah kota untuk mengatasi masalah kemacetan jalan raya. Setelah pondasi yang kokoh dibangun (Gambar 10.5 A), beberapa badan jembatan yang telah dibentuk dengan ukuran tertentu diangkat dan disambungkan satu sama lain pada setiap pondasi yang telah tersedia (Gambar 10.5 B) sehingga terbentuk sebuah jembatan layang yang panjang (Gambar 10.5 C). Tentu saja kedua blok badan jembatan yang terhubung mempunyai garis pemisah (Gambar 10.5 B).

Jika setiap pondasi merupakan titik-titik pada himpunan X dan badan jembatan merupakan kurva yang dipenuhi oleh fungsi $y = f(x)$ maka hubungan antara pondasi dan badan jembatan merupakan sebuah pemetaan atau fungsi.

Ingat kembali pengertian sebuah fungsi pada bab sebelumnya. Misalkan X dan Y ada-lah himpunan yang tidak kosong, $x \in X$, $y \in Y$, sebuah fungsi f memetakan setiap anggota himpunan X ke tepat satu anggota himpunan Y.

Gambar 10.6 Pemetaan

Pilih salah satu pondasi sebagai titik yang akan didekati. Lihat pada Gambar 10.5 B. Kita anggap garis pemisah pada persambungan kedua blok badan jembatan sebagai ilustrasi $x \neq c$.

- *Arahkan siswa berdiskusi untuk memikirkan, apakah kedua blok badan jembatan tersebut mempunyai limit pada garis persambungan tersebut? Berikan ide-ide secara bebas dan terbuka. Manfaatkan jawaban siswa untuk melahirkan sebuah konsep dan pendefinisian tentang limit fungsi, sebagai berikut:*

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, kita tetapkan pengertian limit fungsi, sebagai berikut.

Definisi 10.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L dan c bilangan real.

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L.

Kita menyatakan bahwa f mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Seperti yang telah dijelaskan di awal bab ini, sebuah pengamatan pada permasalahan akan melahirkan pengertian dan konsep umum. Tetapi ada baiknya kita harus menguji kembali konsep tersebut. Mari kita amati kembali konsep limit fungsi tersebut dengan mengambil strategi numerik, dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukanlah titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Hitung nilai $f(x)$ untuk setiap nilai x yang diberikan?
3. Kemudian amatilah nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.
4. Ada atau tidakkah suatu nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati c tersebut?

Contoh 10.1

Misalkan fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita menentukan x mendekati 2, kemudian kita tentukan nilai y oleh fungsi $y = f(x)$ pada tabel berikut. Kemudian amatilah tabel berikut.

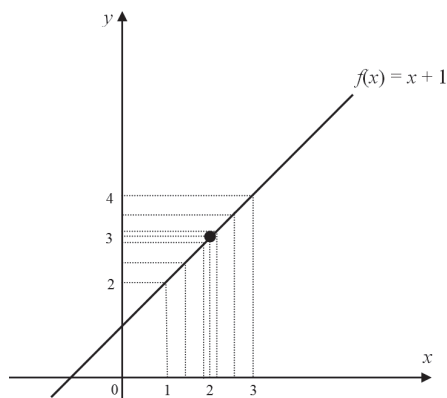
Tabel 10.3 Nilai fungsi *f*(*x*) = *x* + 1 pada saat *x* mendekati 2

x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	…	?	…	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

Apakah pengamatanmu? Perhatikanlah tabel tersebut. Kita dapat memberikan beberapa pengamatan sebagai berikut.

- Ada banyak bilangan real yang dapat ditentukan yang mendekati 2.
- Setiap titik x mempunyai peta di y oleh fungsi yang diberikan.
- Setiap peta x juga mendekati peta 2.
- Tampak bahwa pendekatan ada dari kiri dan kanan tabel.

> Menurut kamu, apa yang terjadi jika y hanya mendekati dari sebelah kiri atau kanan saja? Apakah ada fungsi yang demikian

Perhatikan sketsa berikut:

Gambar 10.7 Grafik Fungsi *f*(*x*) = *x* + 1

Secara matematika, fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} (x+1) = 3$$

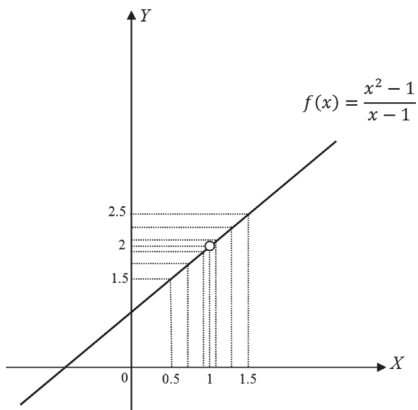
Bagaimanakah jika $f(x)$ tidak terdefinisi pada titik $x + 1$? Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 10.2

Jika fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ untuk $x \in R$, $x \neq 1$. Misal $y = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ untuk $x \neq 1$. Nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x yang mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.4 Nilai fungsi *y* = *f*(*x*) mendekati 2, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…	?	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

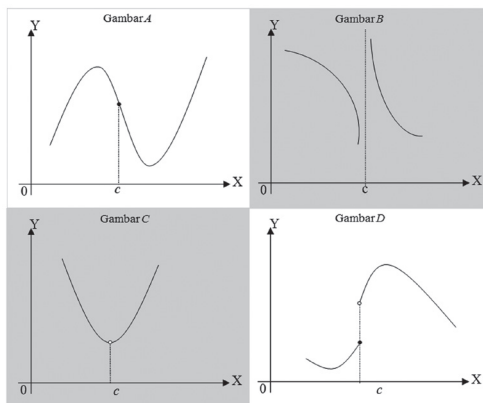
Berdasarkan nilai tabel di atas, dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.

Gambar 10.8 Grafik fungsi *f*(*x*)

Diskusi

Perhatikanlah gambar di samping!
Coba diskusikan kembali dengan temanmu, apa maksud dari gambar bulatan kosong pada kurva fungsi pada saat $x = 1$?

Secara matematika, fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ dengan $x \neq 1$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

- *Arahkan siswa untuk membentuk kelompok diskusi 2 atau 4 orang. Ingatkan kembali siswa tentang definisi limit fungsi di atas. Arahkan siswa untuk menghubungkan definisi limit tersebut dengan keempat gambar berikut dan berikan mereka kesempatan untuk memberikan komentar dan saling menanggapi. Guru harus memberikan kesimpulan akhir.*

Gambar 10.9 Grafik fungsi *f*(*x*) terkait limit

Contoh 10.3

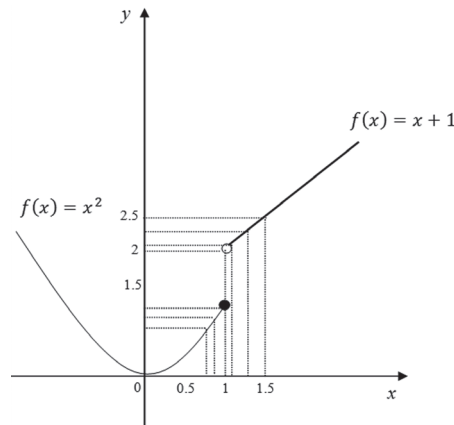
Perhatikan fungsi berikut:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$$

Jika $y = f(x)$ maka nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.5 Nilai fungsi *y* = *f*(*x*) mendekati 2, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan tabel di atas, $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Hal ini mengakibatkan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.

Gambar 10.10 Grafik fungsi *f*(*x*)

Dengan demikian fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$ tidak memiliki limit di titik $x = 1$.

- *Arahkan siswa mengkaitkan contoh ini ke definisi. Melalui pemahaman siswa tentang definisi limit fungsi, berikan mereka waktu membuat sebuah contoh dan mempresentasikan di depan kelas. Guru harus memberi kesimpulan akhir.*

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Perhatikan kembali beberapa contoh berikut. Kita akan mencoba mengamati sifat-sifat limit fungsi pada beberapa contoh dan tabel nilai-nilainya.

Contoh 10.4

Jika $f(x) = 2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai-nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.6 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 2, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	2	2	2	2	2	2	...	?	...	2	2	2	2	2	2

Apa yang kamu peroleh dari Tabel 10.6?

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat kita tuliskan secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \to 1^-} 2 = 2 = \lim_{x \to 1^+} 2 \quad \text{...(1)}$$

Contoh 10.5

Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.7 Nilai pendekatan *f*(*x*) = *x*, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut. Perhatikanlah, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 1 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat ditulis secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \to 1^-} x = 1 = \lim_{x \to 1^+} x \quad \text{..(2)}$$

- *Arahkan siswa untuk menggambar fungsi tersebut! Berikan waktu kepada siswa untuk menjelaskan pendapatnya kemudian guru mengajak siswa mengambil kesimpulan.*

Berdasarkan (1) dan (2) secara induktif diperoleh sifat berikut.

Sifat-1

Misalkan f suatu fungsi dengan $f: R \to R$ dan L, c bilangan real.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x\to c^-} f(x) = L = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Contoh 10.6

Jika $f(x) = x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.8 Nilai pendekatan *f*(*x*) = *x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,04	0,25	0,81	0,98	0,99	...	?	...	2,00	2,02	1,21	2,25	3,23	4

Nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 adalah 1.

Berdasarkan Tabel 10.8, $\lim_{x\to 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} x^2 &= \lim_{x\to 1} x \times x \\ &= \lim_{x\to 1} x \times \lim_{x\to 1} x \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Contoh 10.7

Jika $f(x) = 2x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.9 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 2*x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,08	0,5	1,62	1,96	1,99	...	?	...	2,00	2,04	2,42	2	2	2

Berdasarkan Tabel 10.9, $\lim_{x\to 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 2x^2 &= \lim_{x\to 1} 2 \times x \times x \\ &= \lim_{x\to 1} 2 \times \lim_{x\to 1} x \times \lim_{x\to 1} x \\ &= 2 \times 1 \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Contoh 10.8

1. Jika $f(x) = 2x^2 + 2x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.10 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 + 2x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	1,5	3,42	3,94	3,98	…	?	…	4,00	4,06	4,62	7,5	12,0

Berdasarkan Contoh 10.7 dan Tabel 10.8 diperoleh $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 2x &= \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 2x \\ &= 2 + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

Contoh 10.9

Jika $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.11 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	–25	7,14	2,78	0,26	2,01	…	?	…	1,99	1,94	1,52	0,67	0,49

Berdasarkan tabel di atas, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{2x^2 - x} = 2$ atau

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{2}{2x^2 - x} &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - x} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 1} x} \\ &= \frac{2}{2-1} = 2\end{aligned}$$

Perhatikanlah sifat-sifat limit fungsi berikut:

Sifat-2

Misalkan f dan g adalah fungsi yang mempunyai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]$
4. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) + g(x)\right] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] + \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
5. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) - g(x)\right] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] - \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
7. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}\right]$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh 10.10

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm)^2. Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah ...

Penyelesaian

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 10.12 Nilai pendekatan pada saat *t* mendekati 5

12	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\Delta f/\Delta t$
1	–4	–8	2
2	–3	–6,75	2,25
3	–2	–5	2,5
4	–1	–2,75	2,75
4,5	–0,5	1,4375	2,875
4,9	–0,1	–0,2975	2,975
4,99	–0,01	–0,029975	2,9975
4,999	–0,001	–0,00299975	2,99975
4,9999	–0,0001	–0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,253,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian lainnya

$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$

$f(5) = 0{,}25(5)^2 + 0{,}5(5) = 8{,}75$

$$\lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{t \to 5} \frac{(0{,}25t^2 + 0{,}5t) - f(5)}{t - 5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}25t^2 + 0{,}5t - 8{,}75}{t - 5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}5(0{,}5t^2 + t - 17{,}5)}{t - 5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0,5(0,5t+3,5)(t-5)}{t-5}$$

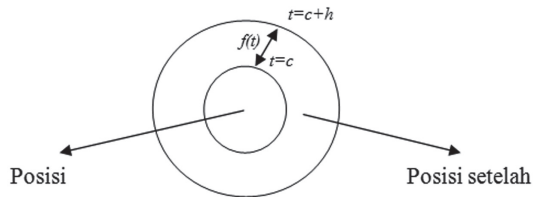
$$= \lim_{t \to 5} 0,5(0,5t+3,5)$$

$$= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5)$$

$$= 3$$

- *Berikan waktu pada siswa menggunakan manipulasi aljabar pada proses limit di atas! Beri kesempatan bagi siswa untuk menjelaskan jawabannya. Beri kesempatan bagi siswa yang lain untuk memberi komentar. Jika siswa tidak dapat mengerjakannya, beri bantuan berupa pertanyaan atau mengingatkan konsep terkait yang sudah dimiliki siswa.*

Alternatif Penyelesaian lainnya

$v(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ dimana $v(t)$ adalah kecepatan pertambahan luas
$f(t)$ adalah pertambahan luas
t adalah pertambahan luas

Gambar 10.11 Pemuaian logam pada waktu *t* = *c*

Untuk $t_1 = c$ diperoleh $f(t_1) = f(c)$ dan untuk perubahan waktu $t_2 = c + h$ diperoleh perubahan perambahan luas bidang $f(t_2) = f(c + h)$ sehingga
f(c) = 0,25c2 + 0,5c
$f(c + h) = 0,25(c + h)^2 + 0,5(c + h) = 0,25c^2 + 0,25h^2 + 0,5ch + 0,5c + 0,5h$

kecepatan sesaat pertambahan luas bidang adalah:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0,25c^2+0,25h^2+0,5ch+0,5c+0,5h)-(0,25c^2+0,5c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0,25h^2+0,5ch+0,5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0{,}25h + 0{,}5c + 0{,}5)h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (0{,}25h + 0{,}5c + 0{,}5) \text{ karena } h \neq 0$$

$$= 0{,}5c + 0{,}5$$

Kecepatan sesaat pertambahan luas bidang pada $t = 5$ adalah $0{,}5(5) + 0{,}5 = 3{,}0$ (cm^2/menit).

3. Menentukan Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan limit secara numerik, memfaktorkan, dan perkalian sekawan. Coba kita pelajari permasalahan yang dihadapi oleh grup diskusi berikut.

Lina dan Wati adalah teman satu kelompok belajar di kelasnya. Suatu hari mereka mendapat tugas dari guru untuk menggambar beberapa grafik fungsi dengan mencari sebanyak mungkin titik-titik yang dilalui fungsi tersebut. Pada saat mereka menentukan beberapa nilai di daerah asalnya, mereka mendapatkan kesulitan untuk menentukan nilai di daerah hasilnya, sebagai berikut:

1. Untuk $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = -1$ karena jika disubstitusi nilai 1 atau –1 ke fungsi, nilai $f(1) = \frac{0}{0}$ dan $f(-1) = \frac{0}{0}$.
2. Untuk $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 0$ karena jika nilai 0 disubstitusi juga ke fungsi maka mereka memperoleh $f(0) = \infty - \infty$.

Menurut kamu, apakah penyebab permasalahan mereka?

Jika kita pelajari lebih teliti, Lina dan Wati sedang menghadapi permasalahan bentuk tak tentu suatu limit. Coba kita tampilkan kembali sifat suatu limit. Misalkan f suatu fungsi dengan $f : R \to R$ dan L, c bilangan real, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$.

Nilai L yang kita maksud adalah bentuk tentu limit. Jadi, jika kita substitusikan nilai c ke fungsi $f(x)$ sehingga $f(c)$ adalah bentuk-bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$,

0^0, ∞^∞, dan lain-lain maka bentuk tersebut gagal menjadi nilai limit fungsi tersebut. Oleh karena itu, misi kita dalam limit fungsi adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi, dengan pengamatan berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi sehingga diperoleh $f(c) = L$.
2. Jika L merupakan salah satu bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih strategi: mencari beberapa titik pendekatan (numerik), memfaktorkan, perkalian sekawan, dll.

   Ingat: $\sqrt{x} - a$ sekawan dengan $\sqrt{x} + a$,

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Contoh 10.11

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Cara I (Numerik)

Jika $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.13 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	?	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Dengan melihat tabel di atas, jika x mendekati 2, maka $y = f(x)$ akan mendekati 0,25.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)((x+2)}$ sehingga:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \quad \text{karena } x \neq 2$$

Dapatkah anda meneliti untuk mendapatkan metode yang lain untuk menyelesaikan permasalahan limit fungsi tesebut.

$$= \frac{1}{4}$$
$$= 0{,}25$$

Contoh 10.12

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.14 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ pada saat x mendekati –2

x	–2,3	–2,3	–2,1	–2,01	–2,001	–2	– 1,999	– 1,99	–1,9	–1,8	–1,7
y	2,594	–2,530	–2,501	–2,499	–2,5	?	–2,5	– 2,501	–2,528	2,599	– 2,763

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati –2 maka $y = f(x)$ akan mendekati –2,5

Cara II (Perkalian sekawan)

Perhatikan bahwa $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ dapat kita ubah dengan mengalikan bentuk sekawan dari $\left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}\right)$ sehingga:

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} . \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 + x - 1) - (2x + 5)}{(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)} \qquad \text{karena } x \neq -2$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$= -2,5$$

Contoh 10.13

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$ dan $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$

Jika $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$, maka $f(1) = \frac{0}{0}$, $f(-1) = \frac{0}{0}$. Karena kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut pada saat x mendekati 1 dan –1.

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 1 dan –1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.15 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	?	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 10.16 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ pada saat x mendekati –1

x	–1,3	–1,2	–1,1	–1,01	–1,001	–1	–0,999	–0,99	–0,9	–0,8	–0,7
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	?	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2 dan jika nilai x mendekati –1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ sehingga:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$$ (Karena $x \neq 1$ dan $x + 1\ x \neq 0$)

$$= \lim_{x\to 1} x^2+1$$

$$= \lim_{x\to 1}\ 1^2+1$$

$$= 2$$

dan

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}$$ (Karena $x \neq 1$ dan $x + 1\ x \neq 0$)

$$= \lim_{x\to -1} x^2+1$$

$$= \lim_{x\to -1}\left(-1\right)^2+1$$

$$= 2$$

Contoh 10.14

Tentukanlah $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 0 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.17 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ pada saat x mendekati 0

x	–0,3	–0,2	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3
y	–0,08	–0,08	–0,07	–0,07	–0,06	?	–0,06	–0,06	–0,06	–0,05	–0,04

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x semakin mendekati 0 maka $y = f(x)$ akan semakin mendekati –0,06.

Cara II (Faktorisasi)

Fungsi $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}$ sehingga:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right) \qquad \text{(Sifat-10.2)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x} . \frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} . \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}$$

Uji Kompetensi 10.1

Pilihlah strategi pendekatan atau numerik untuk menentukan nilai limit fungsi pada soal no. 1 sampai no. 5. Kemudian anda pilih strategi lain dan membandingkan jawaban anda dengan jawaban anda pada srategi sebelumnya.

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2} = \ldots$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} = \ldots$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right) = \ldots$

   A. –2 D. 2
   B. $-\dfrac{1}{8}$ E. $\dfrac{1}{8}$
   C. 0

4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \ldots$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+3} - 2} = \ldots$

   A. –2 D. 2
   B. $-\dfrac{1}{8}$ E. $\dfrac{1}{8}$
   C. 0

Selesaikanlah permasalahan berikut.

6. Sketsalah dan analisislah limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{jika} \quad x > 1 \\ 2x + 1 & \text{jika} \quad -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{x+1} & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}$$

7. Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.
   a. Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!
   b. Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!
   c. Sketsalah permasalahan tersebut!

8. Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan dua atau lebih metode penyelesaian! Bandingkan jawaban yang anda peroleh!

a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

b. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$

c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h\to 0} \frac{f(x-4h)-f(x+2h)}{3h}$

9. Tentukanlah nilai limit fungsi $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}$ dengan menggunakan numerik dan perkalian sekawan pada saat x mendekati 2.

10. Jika fungsi $f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x$ maka $\lim_{x\to 2013}\left(\frac{3f(x)}{x-2013}\right)$

Projek

Himpun informasi penerapan limit fungsi dalam bidang teknik, masalah nyata, fisika, dan teknologi informasi. Rancanglah minimal dua masalah terkait informasi yang kamu peroleh dan buatlah pemecahannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu, dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik *c*, sangat bergantung pada kedudukan titik *c* dan domain fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi domain fungsi adalah himpunan bilangan real di mana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi *f* dikatakan mempunyai limit di titik *c* jika dan hanya jika nilai fungsi untuk *x* dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi *f* mempunyai limit di titik *c*, apabila limit kiri sama dengan limit kanan fungsi di titik *c*.
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik *c*. Titik *c* tidak harus anggota daerah asal fungsi, tetapi *c* bilangan real.

5 Misalkan *f* sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan *c* dan *L* adalah bilangan real, fungsi *f* mendekati *L* pada saat *x* mendekati *c* dapat kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

6. Misalkan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada *x* mendekati *c*, dengan *k* dan *c* adalah bilangan real serta *n* adalah bilangan bulat positif.
   a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
   b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
   c. $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]$
   d. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \pm \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
   e. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
   f. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}\right]$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

g. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

h. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

7. Selanjutnya kita akan membahas tentang materi statistika. Materi prasyarat yang harus ananda kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan dan pengukuran. Hal ini sangat berguna dalam penentuan nilai rata-rata, median, modus, quartil, standar deviasi, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, ananda harus menguasai tentang fungsi, limit fungsi dan fungsi yang kontinu sebagai prasyarat untuk mempelajari statistik. Semua apa yang ananda sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

Bab 11

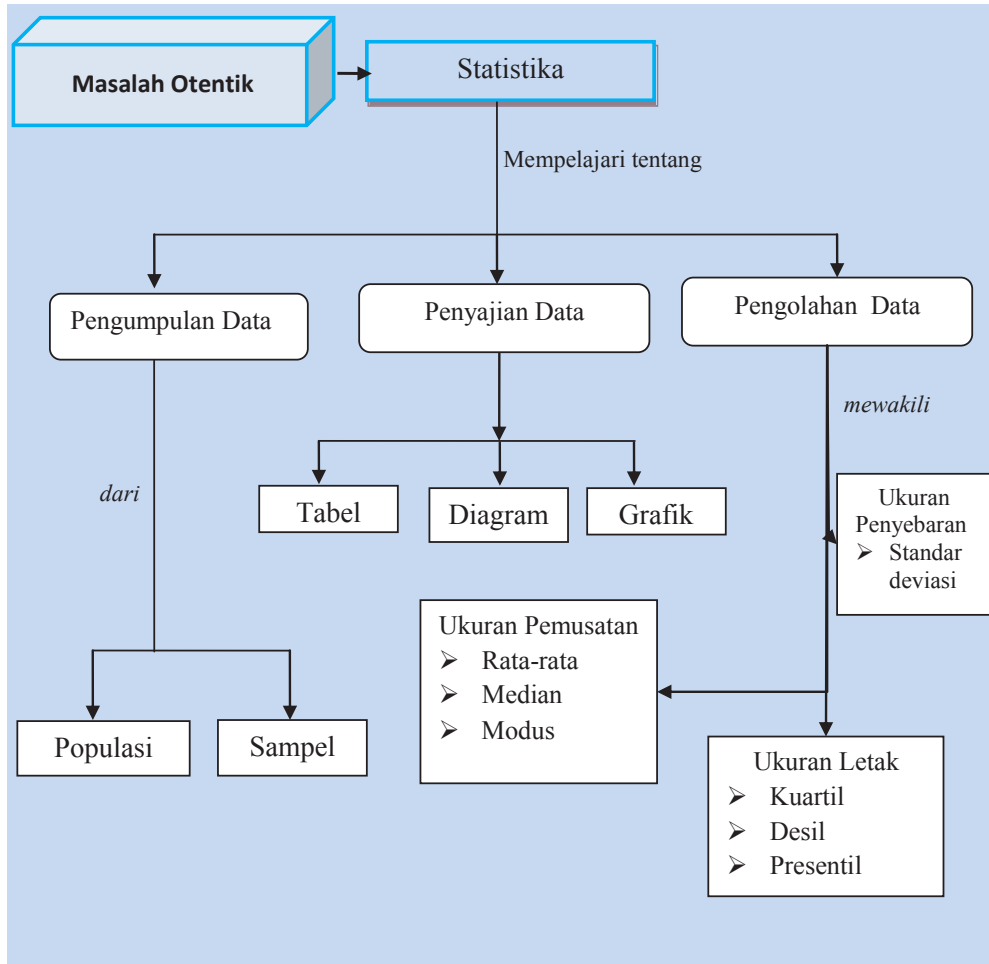
Statistika

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Melalui proses pembelajaran statistika, siswa mampu 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten, dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal, dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami berbagai penyajian data dalam bentuk tabel atau diagram/plot yang sesuai untuk mengkomunikasikan informasi dari suatu kumpulan data melalui analisis perbandingan berbagai variasi penyajian data; 5. menyajikan data nyata dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan.	Melalui pembelajaran materi statistika, siswa memperoleh pengalaman belajar: • melatih berpikir kritis dan kreatif; • mengamati keteraturan data; • berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah; • berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka; • mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Mean (rata-rata)*
- *Ukuran Pemusatan*
- *Ukuran Letak*
- *Median*
- *Modus*
- *Kuartil*
- *Desil*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Ceritakan kepada siswa bahwa materi statistika sangat diperlukan dalam penyelesaian permasalahan kehidupan sehari-hari, misalnya untuk menghitung hasil panen, menghitung laba dari penjualan, menghitung populasi penduduk, menghitung kekayaan penduduk, menentukan besar pajak yang harus dibayarkan, dan yang paling sering didengar adalah untuk menghitung cepat (quick count) dalam suatu pemilihan umum.

1. Data Tunggal

Pada subbab ini, akan dipelajari data-data yang muncul dalam kehidupan sehari-hari. Data merupakan hal yang sangat diperlukan untuk memberikan keterangan atau informasi yang diperoleh dari suatu pengamatan. Data dapat berupa angka, lambang, ataupun karakteristik. Data yang diperoleh sebaiknya merupakan data yang sifatnya merupakan perwakilan dari kejadian. Selain itu data juga harus objektif sesuai dengan kenyataan, dan memiliki hubungan terhadap permasalahan/kejadian yang akan diselesaikan. Secara umum, dari suatu data dapat digali informasi-informasi penting sebagai pertimbangan seseorang untuk mengambil keputusan yang akan dilakukannya; misalnya, para pimpinan instansi atau pihak yang berkepentingan. Perhatikan masalah tingkat produksi pertahun beberapa UKM di Yogyakarta, tahun 2012.

Masalah-11.1

Data Tingkat Produksi Barang UKM di Yogyakarta

Sebuah lembaga survey menemukan bahwa terdapat 10 Usaha Kecil Menengah (UKM) yang tersebar di propinsi D.I. Yogyakarta yang memproduksi berbagai produk, seperti: kerajinan tangan, makanan kering, dan aksesoris. Lembaga survei tersebut memperoleh data produksi sepuluh UKM untuk tahun 2012 yakni sebagai berikut (dalam satuan Unit).

Tabel 11.1 Data Jumlah Produksi Barang UKM di Yogyakarta

UKM	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Jumlah Produksi (unit)	400	550	600	700	350	450	650	600	750	600

Berdasarkan data pada Tabel 11.1, lembaga survei ini memberikan data statistik kepada pemerintah (khususnya menteri keuangan dan perdagangan) untuk merespon keadaan UKM di Yogyakarta. Bagaimana harus menyusun informasi mengenai data tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan pengolahan data tersebut, terlebih dahulu disajikan dalam tampilan yang lebih menarik.

a. Penyajian Data Tabel

Sebenarnya data yang diperoleh lembaga survei pada Tabel 11.1 sudah dalam bentuk tabel, tetapi mari kita sajikan dalam tampilan yang lebih menarik lagi, seperti Tabel 11.2 berikut ini.

Tabel 11.2 Data Jumlah Produksi Barang UKM di Yogyakarta

UKM	Jumlah Produksi (dalam satuan unit)
A	400
B	550
C	600
D	700
E	350
F	450
G	650
H	600
I	750
J	600
Total	5.650

Kemudian, lembaga tersebut ingin menyampaikan informasi tentang rata-rata tingkat produksi produk UKM di Yogyakarta, untuk dapat dibandingkan dengan tingkat produksi UKM di provinsi lain. Untuk data tunggal, rata-rata (*mean*) dirumuskan sebagai berikut.

$$Mean(\bar{x}) = \frac{\text{datum ke-1} + \text{datum ke-2} + \text{datum ke-3} + \ldots + \text{datum ke-}n}{\text{banyak datum}}$$

Untuk data di atas, diperoleh:

$$\bar{x} = \frac{400 + 550 + 600 + 700 + 350 + 450 + 650 + 600 + 750 + 600}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{5.650}{10} = 565$$

Artinya, rata-rata tingkat produksi setiap UKM di Yogyakarta pada tahun 2012 adalah 565 unit.

Selain rata-rata data tersebut, terdapat tiga UKM yang memiliki jumlah produksi yang sama, sebesar 600 unit. Dalam arti statistik, dari 10 data yang tersaji, terdapat 3 angka yang paling sering muncul, yaitu 600.

Definisi 11.1

Datum yang paling sering muncul disebut modus.

Jadi, modus data dari Tabel 11.1 adalah 600.
Jika data terendah diurutkan sampai data tertinggi, diperoleh urutan data Tabel 11.1 sebagai berikut.

350, 400, 450, 550, 600, 600, 600, 650, 700, 750

Jika data tertinggi dikurang dengan data terendah diperoleh:

Datum tertinggi – datum terendah $= 750 - 350$
$= 400.$

Hasil pengurangan ini dalam statistik disebut dengan jangkauan data (*range*). Pada data di atas, diperoleh jangkauannya 400.

Sifat-1

Jangkauan Data = Datum tertinggi – Datum terendah $= x_{maks} - x_{min}$

Dari urutan data tersebut diperoleh nilai tengah data (*median*). Nilai tengah data (*median*) adalah statistik yang membagi dua data pada bagian yang sama.

350	400	450	550	600	600	600	650	700	750

Bagian-1 Bagian-2

Jadi median data $= \dfrac{600 + 600}{2} = 600.$

Secara umum, formula untuk menentukan median, dirumuskan sebagai berikut:

> *Catatan:*
> Ingat definisi datum sewaktu kamu di SMP!

- Jika banyak data genap, median dirumuskan:

Sifat-2

$$\text{Median} = \frac{\text{Datum ke}\left(\frac{n}{2}\right) + \text{Datum ke}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2},\quad n:\text{banyak data}$$

- Jika banyak data ganjil, median dirumuskan:

Sifat-3

Median = Datum nilai ke $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, n : banyak data, n : genap

Selanjutnya, lembaga survei tersebut ingin menyajikan data tersebut dalam empat bagian utama. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut Kuartil. Misalkan terdapat data $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ dengan $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$.

Kuartil 1 (Q_1) atau kuartil bawah, kuartil 2 (Q_2) atau kuartil tengah dan kuartil 3 (Q_3) atau kuartil atas, merupakan statistik yang membagi data menjadi empat bagian yang sama. Letak tiap kuartil didefinisikan sebagai berikut.

Sifat-4

Letak Q_1 = Datum ke-$\left(\frac{i(n+1)}{4}\right)$, n : banyak data

Letak Q_i tidak selalu pada posisi datum ke-i, mungkin juga terletak di antara dua datum. Untuk keadaan seperti ini, diggunakan pola pendekatan atau interpolasi. Melihat kembali data di atas, kita akan menentukan statistik yang membagi data menjadi empat bagian.

Letak Q_1 = Datum ke $\frac{1.(10+1)}{4}$ = Datum ke-$2\frac{3}{4}$.

Artinya Q_1 terletak di antara datum ke-2 (x_2) dan datum ke-3 (x_3). Dengan pendekatan datum interpolasi berikut.

- $Q_1 = x_2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_2) \Leftrightarrow Q_1 = 400 + \frac{3}{4}(450 - 400) = 437,5.$

Letak Q_2 = Datum ke $\frac{2(10+1)}{4}$ = Datum ke-$5\frac{1}{2}$.

Analog dengan Q_1, Q_2 ditentukan melalui pendekatan datum interpolasi berikut.

- $Q_2 = x_5 + \frac{1}{2}(x_6 - x_5) \Leftrightarrow Q_2 = 600 + \frac{1}{2}(600 - 600) = 600.$

Sebagai catatan nilai $Q_2 = Median$.

Letak Q_3 = Datum ke $\frac{3(10+1)}{4}$ = Datum ke-$8\frac{1}{4}$.

Analog juga dengan Q_1 dan Q_2, nilai statistik Q_3 dihitung melalui pendekatan datum interpolasi.

- $Q_3 = x_8 + \frac{1}{4}(x_9 - x_8) \Leftrightarrow Q_2 = 650 + \frac{1}{4}(700 - 650) = 662,5.$

Kembali ke persoalan kita di atas.

Dengan adanya nilai Q_1, Q_2 dan Q_3, lembaga survei tersebut ingin menyajikan statistik lima serangkai, yaitu statistik yang terdiri dari: datum minimum, datum maksimum, Q_1, Q_2, dan Q_3.
Susunan statistik lima serangkai ini, seperti berikut ini.

Q_2	
Q_1	Q_3
x_{min}	x_{max}

Untuk data di atas, statistik lima serangkainya adalah:

Q_2 = 600	
Q_1 = 437.5	Q_3 =662,5
x_{min} = 350	x_{max} = 750

Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4, sebab kuartil Q_1, Q_2 dan Q_3 membagi data menjadi empat kelompok yang sama. Jika banyak data ≥ 10, maka data dibagi menjadi 10 kelompok yang sama, dengan tiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*. Tentu saja terdapat 9 *desil*, yaitu D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, dan D_9.

Cara menentukan D_i pada suatu data tunggal, hampir sama dengan menentukan kuartil D_i pada data tunggal. Letak setiap D_i didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 11.2

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dengan $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n$.
Desil ke-*i* untuk data tunggal adalah:

$$D_i = \text{Datum ke } \frac{i.(N+1)}{10}$$

Letak D_i tidak selalu pada posisi datum ke-i, mungkin juga terletak di antara dua datum. Untuk keadaan seperti ini, kita mengggunakan pola pendekatan atau interpolasi.

Dalam kajian persoalan kita di atas, kita dapat menentukan D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, dan D_9. Pada buku ini, hanya ditentukan D_3 dan D_7.

Perhatikan kembali data di atas.

350	400	450	550	600	600	600	650	700	750

Langkah awalnya, kita tentukan letak D_3.

$$Letak\ D_3 = \text{datum ke } \frac{3(10+1)}{10} = \text{datum ke} - 3\frac{1}{10}.$$

$$D_3 = x_3 + \frac{1}{10}(x_4 - x_3) = 450 + \frac{1}{10}(550 - 450) = 460.$$

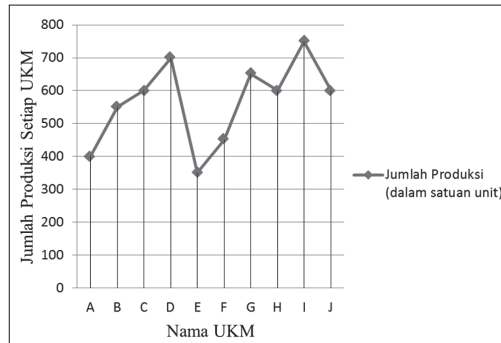
$$Letak\ D_7 = \text{datum ke } \frac{7(10+1)}{10} = \text{datum ke} - 7\frac{1}{10}.$$

$$D_7 = x_7 + \frac{1}{10}(x_8 - x_7) = 600 + \frac{1}{10}(650 - 600) = 605.$$

Untuk ukuran statistik desil yang lain, silahkan kamu tentukan dan cek dengan hasil kerjaan teman sekelasmu yang lain.

b. Penyajian Data dalam Diagram Garis (Line Diagram)

Penyajian data dalam diagram garis berarti, menyajikan data statistik dengan menggunakan garis-garis lurus yang menghubungkan komponen-komponen pengamatan (waktu dan hasil pengamatan jumlah produksi). Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu kondisi yang berlangsung secara kontinu, misalnya data jumlah penduduk, perkembangan nilai tukar mata uang suatu negara, dan jumlah penjualan barang.

Untuk data jumlah Produksi UKM di Yogyakarta, jika dideskripsikan dalam diagram garis akan terbentuk sebagai berikut.

Gambar 11.1 Diagram garis jumlah produksi UKM di Yogyakarta

Tentunya, selain penyajian data tersebut, staf lembaga survei tersebut menyampaikan informasi bahwa,

– masih ada tiga UKM , yaitu UKM A, UKM E, dan UKM F hanya mampu menghasilkan produk UKM kurang dari 500 unit dalam tahun 2012,
– hanya satu UKM, yaitu UKM I yang mampu menghasilkan sebanyak 750 unit produk dalam tahun 2012.

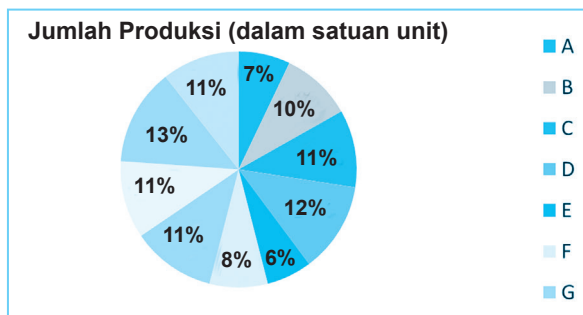
Tolong bantu Staf tersebut untuk menyampaikan informasi penting mengenai jumlah produksi barang UKM di Yogyakarta, tahun 2012.

Selanjutnya, staf tersebut ingin menyampaikan data produksi UKM tersebut dalam tingkat persentase. Untuk itu diperlukan penyajian data dalam bentuk diagram lingkaran (*pie chart*).

c. Diagram Lingkaran (*Pie Chart*)

Melalui diagram ini, akan ditunjukkan besar persentase tingkat produksi tiap UKM. Total produk yang dihasilkan kesepuluh UKM tersebut adalah sebesar 5650 unit. Oleh karena itu, tingkat persentase produksi setiap UKM, didefinisikan sebagai berikut.

$$\%\text{ produksi UKM } X = \frac{\text{Jumlah Produksi UKM } X}{\text{Total Produksi Semua UKM}}.100\%$$

Secara lengkap, persentase produksi setiap UKM, disajikan pada diagram berikut ini.

Gambar 11.2 Persentase tingkat produksi kesepuluh UKM

Setelah diagram lingkaran terbentuk, lembaga survei ingin merangkumkan informasi menarik dari data tersebut. Bantulah staf tersebut untuk memberikan informasi menarik dari diagram lingkaran di atas!

Selain ketiga penyajian data di atas, masih ada cara penyajian data yang lain. Misalnya dengan diagram batang (chart), dan diagram daun. Silahkan diskusikan dengan teman sekelasmu tentang penyajian data tersebut dengan diagram batang dan diagram daun.

Rata-Rata Gaji Buruh

Gaji buruh menjadi topik perbincangan di kalangan buruh dan kalangan pengusaha. Pada tahun 2012, menteri terkait dengan masalah ini merilis gaji buruh di 8 kota besar di negara tersebut sebagai berikut (dalam ratusan ribu rupiah)

Nama Kota	Besar Gaji
A	25
B	18
C	22
D	20
E	17
F	19
G	22
H	22,5

Berdasarkan data tersebut, menteri bermaksud menerapkan kenaikan gaji buruh bersifat situasional, yang disesuaikan dengan kondisi perkembangan perusahaan yang ada di kota tersebut. Hasil pembahasan dengan para pengusaha dari kelima kota tersebut adalah rumusan kenaikan gaji buruh dengan sistem subsidi silang.

Buruh yang memiliki gaji kurang atau sama dengan Rp 2.000.000 diberi kenaikan gaji sebesar 12% dan buruh yang memiliki gaji lebih dari Rp 2.000.000 diberi kenaikan gaji sebesar 8%. Berapakah rata-rata gaji buruh setelah mengalami kenaikan gaji?

Alternatif Penyelesaian

Tabel berikut ini menyajikan besar kenaikan gaji di setiap kota.

Tabel 11.4 Besar Gaji Buruh Sebelum dan Sesudah Kenaikan Gaji di 8 Kota

Nama Kota	Besar Gaji	% Kenaikan Gaji	Nominal Kenaikan Gaji	Gaji setelah Kenaikan
A	Rp2.500.000,00	8%	Rp 200.000,00	Rp 2.700.000,00
B	Rp1.800.000,00	12%	Rp 216.000,00	Rp 2.016.000,00
C	Rp2.200.000,00	8%	Rp 176.000,00	Rp 2.376.000,00
D	Rp2.000.000,00	12%	Rp 240.000,00	Rp 2.240.000,00
E	Rp1.700.000,00	12%	Rp 204.000,00	Rp 1.904.000,00
F	Rp1.900.000,00	12%	Rp 228.000,00	Rp 2.128.000,00
G	Rp2.200.000,00	8%	Rp 176.000,00	Rp 2.376.000,00
H	Rp2.250.000,00	8%	Rp 180.000,00	Rp 2.430.000,00
Total	**Rp16.550.000,00**		**Rp1.620.000,00**	**Rp18.170.000,00**

Pada Tabel 11.4, memaparkan besar kenaikan gaji dan besar gaji yang diterima buruh setelah memperoleh persentasi kenaikan gaji.
Rata-rata gabungan gaji buruh yang baru dapat dihitung melalui rumus berikut.

$$\bar{x}_{Gab} = \frac{\overline{x_A} + \overline{x_B} + \overline{x_C} + \overline{x_D} + \overline{x_E} + \overline{x_F} + \overline{x_G} + \overline{x_H}}{8} = \frac{18.170.000}{8} = 2.271.250$$

Jadi, rata-rata besar gaji buruh setelah mendapat % kenaikan gaji adalah Rp2.271.250,00.

Selain rata-rata besar gaji buruh tersebut, dari tabel tersebut juga bisa kita tentukan rata-rata besar kenaikan gaji dan besar rata-rata gaji sebelum mendapat kenaikan.

Dengan menggunakan rata-rata kenaikan dan rata-rata gaji buruh sebelum kenaikan gaji, dapatkah kamu menentukan rata-rata besar gaji buruh setelah mendapat kenaikan gaji?

Masalah-12.2

Data Berpola Aritmetika

Sewaktu Pak Suprapto memiliki usaha "Toko Serba Ada", beliau mampu menikmati hobinya sebagai kolektor barang-barang antik. Pada tahun 2011, data koleksi barang-barang tersebut memenuhi pola aritmetika berikut.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}, a_{11}, a_{12}.$$

Sejak akhir tahun 2011, Pak Suprapto berhasil mengembangkan usaha tersebut menjadi supermarket. Kondisi ini juga berimbas terhadap kegemarannya, sedemikian sehingga barang-barang koleksi tersebut mengikuti pola:

$$a_1 + t, a_2 + t, a_3 + t, \ldots, a_{10} + t, a_{11} + t, a_{12} + t.$$

Selidikilah perubahan rata-rata dan median data di atas.

Alternatif Penyelesaian

Data tahun 2011, diketahui bahwa:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ memiliki pola aritmetika. Artinya bahwa beda dua suku yang berurutan sama.

$$\overline{X}_{2011} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} + a_{11} + a_{12}}{12} = \frac{6(a_1 + 11b)}{12} = \frac{1}{2}(a_1 + 22b)$$

Karena $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ telah tersusun dari yang terkecil hingga yang tertinggi, maka median data tersebut adalah:

$$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-6} + \text{Data ke-7}}{2} = \frac{a_6 + a_7}{2} = \frac{1}{2}(2a_1 + 11b)$$

Selanjutnya mari kita perhatikan pola data tahun 2012.

$$(a_1 + t), (a_2 + t), (a_3 + t), \ldots, (a_{10} + t), (a_{11} + t), (a_{12} + t)$$

$$\overline{X}_{2012} = \frac{(a_1 + t) + (a_2 + t) + (a_3 + t) + \ldots + (a_{10} + t) + (a_{11} + t) + (a_{12} + t)}{12} \frac{6(a_1 + 11b) + 12t}{12}$$

$$\overline{X}_{2012} = \frac{1}{2}(a_1 + 11b) + t.$$

Median data baru ditentukan:

$$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-6} + \text{Data ke-7}}{2} = \frac{(a_6 + t) + (a_7 + t)}{2} = \frac{a_6 + a_7 + 2t}{2} = \frac{1}{2}(2a_1 + 11b) + t.$$

Perhatikan, bahwa pertambahan setiap nilai data sebesar *t*, mengakibatkan pertambahan rata-rata dan median data baru sebesar *t*. Sebagai kesimpulan dari data di atas adalah bahwa data yang berpola aritmetika memiliki nilai statistik rata-rata sama dengan nilai median. Meskipun ada perubahan pada data lama, selama perubahan data tersebut tetap mengikuti pola aretmatika, nilai kedua statistik juga tetap sama.

- *Ujilah penguasaan siswa terhadap materi yang telah dipelajari. Berikan latihan berikut sebagai penguatan siswa dalam pemahaman konsep!*

Latihan 11.1

Terdapat beberapa kemungkinan terhadap perubahan nilai data, di antaranya setiap nilai data mungkin akan berkurang sebesar *q* atau akan dikali sebesar *p*. Bagaimana perubahan nilai ukuran pusat data tersebut?

Masalah-11.3

Deviasi Rata-Rata

Diketahui x_1 = 3,5, x_2 = 5,0, x_3 = 6,0, x_4 = 7,5, dan x_5 = 8,0. Jika deviasi rata-rata nilai tersebut dinyatakan dengan rumus $\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_1-\bar{x}}{n}\right|$. Tentukanlah deviasi rata rata data yang diketahui pada Masalah-11.2.

Alternatif Penyelesaian

Deviasi rata-rata merupakan ukuran statistik yang dapat digunakan untuk melihat variasi data. Dalam konteks penelitian karya ilmiah yang menyangkut statitika, nilai deviasi rata-rata mungkin menjadi nilai statistik yang penting.

Dalam soal di atas, sudah didefinisikan bahwa deviasi rata-rara adalah nilai mutlak setiap data terhadap rata-rata data. Oleh karena itu, kita perlukan rata-rata terlebih dahulu.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{20}{5} = 6.$$

$$\text{Deviasi rata-rata} = \frac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + |x_3-\bar{x}| + |x_4-\bar{x}| + |x_6-\bar{x}|}{5}$$

$$= \frac{|3,5-6|+|5-6|+|6-6|+|7,5-6|+|8-6|}{5}$$

$$\text{Deviasi rata-rata} = \frac{2,5+1+0+1,5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Jadi deviasi rata-rata data di atas adalah 1,4.

Uji Kompetensi 11.1

1 Data penjualan radio setiap bulan di suatu toko pada tahun 2002 adalah sebagai berikut: 20,3,9,11,4,12,1,9,9,12,8,10. Tentukanlah median, kuartil bawah, dan kuartil atas data tersebut.

2. Tahun lalu gaji awal 5 orang pegawai baru dalam ribuan rupiah sebagai berikut. 480, 360, 650, 700, 260. Dengan bertambahnya harga barang-barang kebutuhan pokok, pihak perusahaan memberikan kebijakan untuk kenaikan gaji mereka. Pegawai dengan gaji kurang dari Rp 500.000 mendapat kenaikan gaji sebesar 15%, dan 10% bagi pegawai dengan gaji lebih dari Rp 500.000. Tentukanlah besarnya kenaikan gaji mereka.

3. Hasil survei tentang *lifespan* (rata-rata lama hidup) manusia di suatu komunitas adalah 40 tahun (terdiri atas dokter dan jaksa). Jika *lifespan* dokter adalah 35 tahun dan *lifespan* jaksa adalah 50 tahun. Tentukanlah perbandingan banyaknya jumlah dokter dan banyaknya dalam komunitas tersebut.

4. Diberikan data tentang tinggi badan 20 siswa (dalam cm) sebagai berikut.
156 158 160 169 160
156 160 162 164 160
156 160 160 166 170
157 156 178 155 155

Deskripsikanlah data tersebut dalam bentuk diagram batang, kemudian tentukanlah ukuran pemusatannya.

5 Nilai ujian mata pelajaran Fisika diberikan dalam tabel berikut.

Nilai	5	6	7	8	9	10
Frekuensi	3	5	4	6	1	1

Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujian siswa tersebut di atas rata-rata. Tentukanlah.

a. Persentasi siswa yang lulus dan tidak lulus ujian mata pelajaran tersebut.

b. Modus dan median data di atas.

6. Suatu data dengan rata-rata 16 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikali p kemudian ditambahkan $2q$, diperoleh data baru dengan jangkauan 9 dan rata-rata menjadi 30. Tentukanlah nilai $p + 3q$.

7. Tabel berikut menunjukkan usia 20 orang naik di kota A, 2 tahun lalu. Jika pada tahun ini 3 orang yang berusia 7 tahun dan seorang yang berusia 8 tahun pindah ke luar kota A.

Usia	Frekuensi
5	3
6	5
7	8
8	4

Hitunglah usia rata-rata 16 orang yang masih tinggal di kota tersebut.

8. Misalkan suatu data $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dengan $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, yang memiliki $\overline{x}$, *modus*, *median*, *kuartil*, *jangkaun*. Jika semua nilai data dikali r, ukuran apakah yang mengalami perubahan?. Hitunglah perubahannya.
Bagaimana perubah terhadap data jika semua nilai data ditambah sebesar s, kemudian hitunglah perubahannya.

9. Di suatu komunitas pecinta koleksi prangko, berniat untuk membantu bencana alam Gunung Merapi, pada tahun 2010. Dari kota Lamongan, rata-rata sumbangan 25 pilatelis adalah sebesar Rp 50.000. Setelah ditambahkan dengan sumbangan 15 pilatelis dari kota Sidoarjo, rata-rata kumulatif menjadi Rp 65.000. Hitunglah sumbangan rata-rata ke-12 pilatelis dari Sidoarjo.

10. Seorang penggemar bola, meng-idolakan 8 *striker* pemain bola terkenal, yaitu Cristiano Ronaldo, Leonil Messi, Carlos Teves, Roney, Fernando Torres, Podolski, Alexander Pato, dan Diego Milito. Pada tahun 2010, dia mencatat banyak gol yang dicetak mereka dalam satu pertandingan. Carlos Teves mampu mencetak $(x + 1)$gol, dan $(2x + 1)$ gol oleh Alexander Pato. Sedangkan 6 *striker* lainnya mencetak gol sebanyak :$(x + 2)$, $(x + 3)$, $(x + 4)$, $(x + 5)$, $(x + 6)$, $(x + 7)$. Jika rata-rata banyak gol yang dicetak oleh mereka adalah 7 gol. Tentukanlah banyak gol yang berhasil dicetak setiap striker pada satu pertandingan.

Projek

Himpunlah informasi berupa data statistik dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

2. Penyajian Data Kelompok

Masalah-11.4

Kepala Sekolah SMA Negeri Unggulan ingin meningkatkan prestasi hasil belajar siswa. Untuk itu perlu diadakan evaluasi untuk melihat statistik berupa *mean*, modus, median dan lainnya. Guru matematika telah memiliki data nilai ulangan siswa kelas 10. Dapatkah kamu membantu guru matematika untuk menemukan statistik data tersebut?

Data ulangan siswa semester diperoleh:

79 80 70 68 92   48 90 92 85 76   48 90 92 85 76   88 78 74 70 38
80 63 76 49 84   61 83 88 81 82   61 83 88 81 82   51 71 72 82 70
81 91 56 65 63   74 89 73 90 97   60 66 98 93 81   93 72 91 67 88
75 83 79 86

Alternatif Penyelesaian

1. Pengolahan Data

Data di atas masih belum berurutan, cobalah mengurutkan data dimulai dari data terkecil hingga data terbesar

38 48 49 51 56   60 60 61 63 63   63 65 66 67 67   68 70 70 70 71
71 72 72 72 73   74 74 75 75 76   76 78 79 79 80   80 80 81 81 81
82 82 83 83 84   85 86 87 88 88   88 89 90 90 90   91 91 91 92 93
93 93 97 98

dari data yang telah terurut di atas dapat diperoleh:

- Data terbesar = 98 dan
  Data terkecil = 38
- Menentukan banyak kelas
  Menurut Sturges, jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k, maka berlaku
  $k = 1 + 3{,}3 \log n$, sehingga,
  $$\text{banyaknya kelas} = 1 + 3{,}3 \log 64 = 1 + 3{,}3\,(1{,}806) = 1 + 5{,}9598 \approx 7$$
- Menentukan panjang interval kelas
  $$\text{panjang kelas} = \frac{\text{jangkauan}}{\text{banyak kelas}}$$

$$= \frac{60}{7}$$
$$= 8{,}57 \approx 9$$

Adakah cara yang lain yang kalian temukan dalam menentukan panjang kelas?

- Menentukan batas kelas interval
  ambil data yang terurut di atas sembilan data
  $\underbrace{38\ 39\ 40\ 41\ 42\ 43\ 44\ 45\ 46}_{9}$, dapat ditulis

  kelas I = 38 – 46
  kelas II = 47 – 55
  :
  :
  dst.

- Menentukan frekuensi
  gunakanlah sistem turus (*tally*) untuk mencari frekuensi data

Tabel 11.4. Tabel frekuensi

Kelas	Turus (*Tally*)	Frekuensi
38 – 46	I	1
47 – 55	III	3
56 – 64	~~IIII~~ II	7
65 – 73	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
74 – 82	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	17
83 – 91	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16
92 – 100	~~IIII~~ I	6
Total		**64**

- Menentukan titik tengah
  Titik tengah diperoleh dari:

  Titik tengah = $\frac{1}{2}$[batas bawah + batas atas]

  dengan hasil pengolahan data di atas dapat disajikan tabel statistik sebagai berikut.

Tabel 11.5 Tabel Frekuensi

No	Kelas	Titik tengah	Frekuensi
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	3
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	14
5	74 – 82	78	17
6	83 – 91	87	16
7	92 – 100	96	6
Total			**64**

2. Nilai Statistik Data Berkelompok

- *Mean*

  Terdapat dua cara untuk menghitung data berkelompok yaitu:

  1. Menentukan Mean dengan Rumus Mean

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

dengan : f_i = frekuensi kelas ke-*i*

x_i = nilai tengah kelas ke-*i*

Langkah 1. Tentukan nilai tengah setiap kelas

Langkah 2. Hitung hasil kali frekuensi dengan nilai tengah (f_i, x_i) untuk setiap kelas

Langkah 3. Hitung mean dengan menggunakan rumus

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dengan menggunakan langkah-langkah di atas diperoleh tabel frekuensi.

Tabel 11.6 Penghitungan Rata-rata (Mean)

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
1	38 – 46	42	1	42
2	47 – 55	51	3	153
3	56 – 64	60	7	420
4	65 – 73	69	14	966
5	74 – 82	78	17	1.326
6	83 – 91	87	16	1.392
7	92 – 100	96	6	576
Total			$\sum_{i=1}^{k} f_i = 64$	$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = 4.875$

$$mean = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$mean = \frac{4.875}{65} = 76{,}17$$

2. Menentukan mean dengan rumus rata-rata sementara

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dimana : f_i = frekuensi kelas ke-i

$\overline{x}_s$ = Rata-rata sementara

Langkah 1. Ambil nilai tengah dengan frekuensi terbesar sebagai mean sementara x_s.

Langkah 2. Kurangkan setiap nilai tengah kelas dengan *mean* sementara dan catat hasilnya dalam kolom $d_i = x_i - x_s$.

Langkah 3. Hitung hasil kali $f_i d_i$ dan tuliskan hasilnya pada sebuah kolom, dan hitung totalnya.

Langkah 4. Hitung *mean* dengan menggunakan rumus rataan sementara.

Langkah-langkah di atas diselesaikan pada tabel berikut:

Tabel 11.7 Perhitungan Rataan sementara

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - x_s$, $x_s = 78$	$f_i \cdot d_i$
1	38 – 46	42	1	–36	–36
2	47 – 55	51	3	–27	–81
3	56 – 64	60	7	–18	–126
4	65 – 73	69	14	–9	–126

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - x_s$ $x_s = 78$	$f_i \cdot d_i$
5	74 – 82	78	**17**	0	0
6	83 – 91	87	16	9	144
7	92 – 100	96	6	18	108
Total			$\sum_{i=1}^{k} f_i = 64$		$\sum_{i=1}^{k} f_i d_i = -117$

diperoleh:

$$\text{Mean} = \overline{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$\text{Mean} = 78 + \frac{-117}{64} = 76{,}17$$

- Dapatkah kamu membandingkan yang terbaik dari kedua cara di atas?
- Dapatkah kamu memiliki cara yang lain dalam menentukan rataan (*mean*)?

- Modus

  dengan menggunakan rumus modus:

$$M_o = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

dimana: M_o = modus; t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Tabel 11.8 Perhitungan Modus

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	3
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	14 } $d_1 = 3$
5	74 – 82	78	$d_2 = 1$ { **17**
6	83 – 91	87	16
7	92 – 100	96	6

dari data di atas dapat ditentukan sebagai berikut.

Tampak modus terletak pada kelas 74 – 82 dengan frekuensi f = 17 dan panjang kelas k = 9. Oleh karena itu t_b = 73,5, dan d_1 = 1 – 14 = 3 serta d_2 = 17– 16 = 1, jadi, modus data di atas adalah:

$$M_o = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

$$= 73,5 + 9\left[\frac{3}{3+1}\right]$$

$$= 73,5 + 6,75$$

$$M_o = 80,25$$

- Dengan menggunakan teknik histogram gambarlah serta tentukan modusnya?

- Median

dengan menggunakan rumus median:

$$\text{Median} = t_b + k\left[\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m}\right]$$

dimana:

t_b = tepi bawah kelas median;
k = panjang kelas
N = banyak datum dari statistik terurut=
F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median
f_m = frekuensi kelas median

dari data sebelumnya diperoleh k =9; t_b =73,5; N = 64; f_m = 17

diperoleh:

$$\text{Median} = t_b + k\left[\frac{\frac{N}{2} - F}{f_m}\right]$$

$$= 73,5 + 9\left[\frac{\frac{64}{2} - 25}{17}\right]$$

$= 73,5 + 3,705$
$= 77.205$

Apakah hubungan dari ketiga pemusatan data di atas? diskusikan dengan temanmu!

Uji Kompetensi 11.2

1 Data pada tabel di bawah ini tentang berat pada siswa 50 siswa.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
31 – 36	4
37 – 42	6
43 – 48	9
49 – 54	14
55 – 60	10
61 – 66	5
67 – 72	2

Tentukanlah mean, median, modul dan kuartil (Q_1, Q_2, dan Q_3) dari data di atas.

2. Hasil observasi tentang berapa kali 18 siswi berhias dalam 1 hari sebagai berikut.

3	3	5	4	7	8	8	8	6
4	6	6	8	4	5	5	5	8

Ubahlah data di atas menjadi data berdistribusi frekuensi berkelompok. Kemudian deskripsikan data tersebut dalam diagram batang.

3. Gaji karyawan suatu pabrik ditampilkan dalam tabel berikut.

Gaji (× Rp 10.000)	Frekuensi
66 – 70	3
71 – 75	3
76 – 80	x
81 – 85	36
86 – 90	24
91 – 95	y
96 – 100	9

a) Jika modus data di atas adalah Rp 830.000, dan banyak data 120 , tentukanlah nilai $x–y$.
b) Dengan menggunakan nilai x dan y, tentukanlah nilai Q_1 dan Q_2.
c) Tentukan rata-rata gaji jika setiap data mendapat tambahan sebesar Rp 50.000.

Projek

Himpunlah minimal lima permasalahan dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas, beberapa konsep perlu kita rangkum guna untuk mengingatkan kamu kembali akan konsep yang nantinnya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Data adalah seluruh keterangan, informasi atau fakta tentang sesuatu hal atau permasalahan.
2. Data yang paling sering muncul disebut modus.
3. Jangkauan Data = Data tertinggi – Data terendah = $x_{maks} - x_{min}$.
4. Median adalah nilai tengah data, untuk data tunggal didefinisikan atas dua
   a. Untuk data genap
   $$\text{Median} = \frac{\text{Data ke-}\left(\frac{n}{2}\right) + \text{Data ke-}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2},\ n: \text{banyak data}$$
   b. Untuk data ganjil
   $$\text{Median} = \text{Data ke-}\left(\frac{n+1}{2}\right),\ n: \text{banyak data}$$
5. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut *Kuartil*.
6. Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4, sebab kuartil Q_1, Q_2, dan Q_3 membagi data menjadi empat kelompok yang sama.
7. Statistik yang membagi data menjadi 10 bagian disebut *Desil*.
8. Jika banyak data ≥ 10, maka kita dapat membagi data menjadi 10 kelompok yang sama, dengan setiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*.
9. *Mean* untuk data berkelompok didefinisikan dengan
   $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$
   dengan f_i = frekuensi kelas ke-i; x_i = nilai tengah kelas ke-i.
10. Mean untuk data berkelompok dengan rumusan rataan sementara didefinisikan dengan $\bar{x} = \bar{x}_s + \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ dengan: f_i = frekuensi kelas ke-i; $\bar{x}_s$ = rata-rata sementara

11. Modus untuk data berkelompok didefinisikan dengan $M_o = tb + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$

    dengan t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas; d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya; d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.

12. Median untuk data berkelompok didefinisikan dengan $\text{Median} = t_b + k\left[\frac{\frac{N}{2} = F}{f_m}\right]$

    Dengan t_b = tepi bawah kelas median; k = panjang kelas; N = banyak data dari statistik terurut = ● f_i; F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median; f_m = frekuensi kelas median.

13. Penyajian data statistik yang sudah terkumpul dapat disajikan dalam bentuk tabel dan diagram.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar statistika. Konsep-konsep dasar di atas harus anda pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan anda sehari-hari. Selanjutnya kita akan membahas tentang peluang dari suatu kejadian dengan melakukan berbagai percobaan.

Bab 12

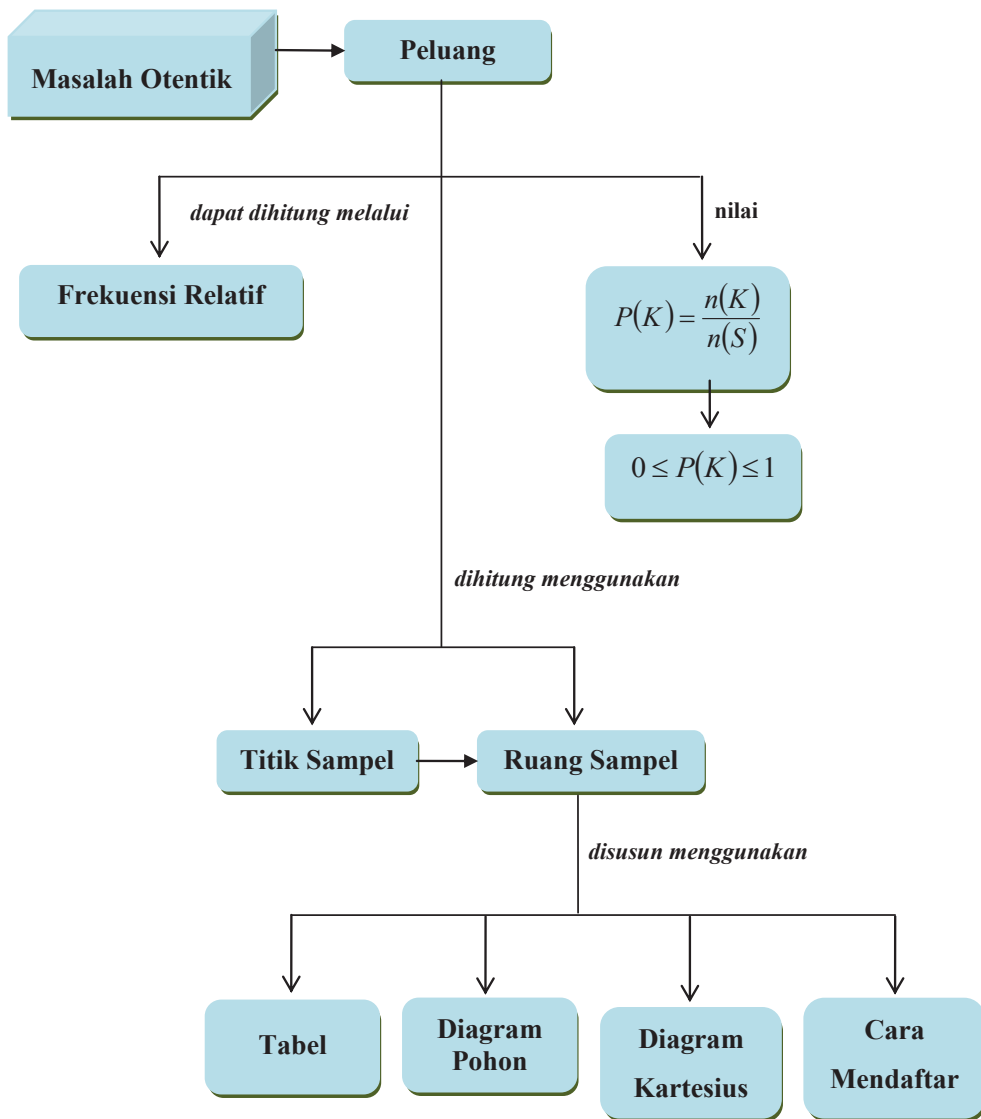
Peluang

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Melalui proses pembelajaran peluang, siswa mampu 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten, dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal, dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami konsep peluang suatu kejadian menggunakan berbagai objek nyata dalam suatu percobaan menggunakan frekuensi relatif; 5. menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.	Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip peluang melalui pemecahan masalah autentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan; • berkolaborasi memecahkan masalah otentik dengan pola interaksi edukatif; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip peluang dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Percobaan*
- *Kejadian*
- *Ruang Sampel*
- *Titik Sampel*
- *Frekuensi Relatif*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Peluang dengan Frekuensi Relatif

- *Arahkan siswa menemukan konsep peluang dari berbagai situasi nyata, melambungkan koin, dadu, serta mencatat data dari hasil percobaan. Selanjutnya mengorganisasikan siswa belajar melalui pemecahan masalah nyata yang memanfaatkan berbagai konsep dan aturan peluang.*

Pernahkah kamu melihat koin (uang logam)? Jika kamu perhatikan maka akan terdapat dua sisi, yaitu sisi angka dan sisi gambar. Jika koin tersebut *ditos* (dilambungkan) maka sisi koin yang akan muncul adalah gambar atau angka. Jika koin tersebut dilempar sebanyak satu kali, maka kemungkinan yang muncul bisa sisi gambar (G) atau angka (A). Jika koin dilempar sebanyak dua kali, maka kemungkinan sisi koin yang muncul AA atau AG atau GG. Bagaimana jika pelemparan koin tersebut dilakukan berkali-kali, apakah banyak sisi gambar dan banyak sisi angka yang muncul relatif sama?

Kegiatan 1

Lakukanlah kegiatan melempar sebuah koin sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan catatlah hasilnya ke dalam tabel berikut:

Tabel 12.1 Hasil dari Percobaan Pelemparan sebuah Koin

Tahap	Banyak Pelemparan	BMSG	BMSA	BMSG/BP	BMSG/BP
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
I	20	8	12	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$
II	40				
III	60				
IV	80				
V	100				
VI	120				

Keterangan:
BMSG adalah Banyak Muncul Sisi Gambar
BMSA adalah Banyak Muncul Sisi Angka
BP adalah Banyak Percobaan

Perhatikan data pada Tabel 12.1 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

a) Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) munculnya gambar relatif sama dengan banyak (frekuensi) munculnya angka?
b) Jika pelemparan koin tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi munculnya gambar dan angka?
c) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom 3 dan 4, hasilnya relatif sama?
d) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom 5 dan 6, hasilnya relatif sama dan nilai perbandingan banyaknya muncul gambar atau angka dengan banyaknya percobaan, nilainya perbandingannya mendekati $\frac{1}{2}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah koin adalah 20 kali dan hasilnya diperoleh frekuensi munculnya gambar adalah 8 kali dan munculnya angka adalah 12 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif munculnya gambar adalah 8 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r\ (G) = \frac{8}{20}$. Frekuensi munculnya angka adalah 12 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r\ (A) = \frac{12}{20}$.

Coba bandingkan frekuensi relatif tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel 12.1 di atas! Apakah keenam frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Kegiatan 2

Dalam kegiatan 2 ini, kita melakukan percobaan menggunakan dadu bermata 6. Lakukanlah kegiatan melambungkan sebuah dadu sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu satu kelompok. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan catatlah hasilnya ke dalam tabel berikut:

Tabel 12.2 Hasil dari Percobaan Pelemparan Sebuah Dadu Bermata 6

Tahap	Banyak Pelemparan	Frekuensi Muncul						Frekuensi Relatif					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(8)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
I	20												
II	40												
III	60												
IV	80												
V	100												
VI	120												

Perhatikan data pada Tabel 12.2 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut.

1. Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 relatif sama banyaknya?
2. Jika pelemparan dadu tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6?
3. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (3), (4), (5), (6), (7), dan (8), hasilnya relatif sama?
4. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (9), (10), (11), (12), (13), dan (14), hasilnya relatif sama dan nilai perbandingan banyaknya muncul mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dengan banyaknya percobaan, nilainya perbandingannya mendekati $\frac{1}{6}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah dadu adalah 20 kali dan hasilnya diperoleh frekuensi munculnya mata 1 sampai mata 5 adalah 3 kali dan munculnya mata 6 adalah 5 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif munculnya mata 1, 2, 3, 4, dan 5 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(1) = \frac{3}{20}$. Frekuensi munculnya mata 2 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(2) = \frac{3}{20}$. Frekuensi munculnya mata 6 adalah 5 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(6) = \frac{5}{20}$. Selanjutnya coba bandingkan frekuensi relatif dari tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.1 di atas! Apakah keenam mata dadu memiliki frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Untuk lebih memamahami frekuensi relatif perhatikan beberapa masalah di bawah ini:

Masalah-12.1

Gambar 12.1 Lampu *LED*

Hasil percobaan pemeriksaan kualitas 20 lampu *LED* di suatu laboratorium fisika diperoleh hasil lampu berkualitas baik 12 dan 8 lampu berkualitas buruk. Tentukanlah frekuensi relatif dari tiap-tiap hasil percobaan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dari data di atas dapat kita bentuk dalam tabel berikut:

Tabel 12.3 Hasil Percobaan Kulitas Lampu

Kejadian	Frekuensi
Baik	12
Buruk	8
Total	20

Dengan menggunakan data tabel di atas dapat kita peroleh:

a. Diketahui: frekuensi kualitas baik = 12
total seluruh percobaan = 20
maka frekuensi relatif kualitas baik adalah:

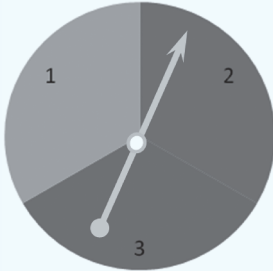
$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi kualitas baik}}{\text{Total percobaan}}$$

$$\text{Frekuensi relatif bola lampu kualitas baik} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

b. Diketahui: frekuensi kualitas buruk = 8
total seluruh percobaan = 20
maka frekuensi relatif bola lampu kualitas buruk adalah:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi kualitas rusak}}{\text{Total percobaan}}$$

$$\text{Frekuensi relatif bola lampu kualitas buruk} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Masalah-12.2

Gambar 12.2 Putaran jarum jam

Dari 80 percobaan putaran jarum jam pada gambar di samping diperoleh:

Tabel 12.4 Hasil Percobaan Putaran Jam

Angka	1	2	3
Frekuensi	25	30	25

Tentukanlah frekuensi relatif tiap angka yang diperoleh dari percobaan di atas? Tentukanlah total frekuensi relatif percobaan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

I. Dengan menggunakan data dari tabel di atas dapat diperoleh:

a) Frekuensi relatif muncul angka 1, yaitu:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi muncul angka 1}}{\text{Total percobaan}}$$

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{25}{80}$$

b) Frekuensi relatif muncul angka 2, yaitu:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi muncul angka 2}}{\text{Total percobaan}}$$

$$= \frac{30}{80}$$

c) Frekuensi relatif muncul angka 3, yaitu:

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Frekuensi muncul angka 3}}{\text{Total percobaan}}$$

$$= \frac{25}{80}$$

II. Dari frekuensi relatif tiap-tiap muncul angka diperoleh total frekuensi relatif putaran jam, yaitu:

$$\text{Total frekuensi} = \frac{25}{80} + \frac{30}{80} + \frac{25}{80}$$

$$= 1$$

Berdasarkan kedua kegiatan dan permasalahan di atas, mari kita tetapkan pengertian frekuensi relatif kejadian munculnya suatu objek dalam sebuah percobaan, sebagai berikut.

Definisi 12.1

Misalkan K suatu kejadian dalam suatu percobaan.
Frekuensi Relatif Kejadian K ($f_r(K)$) adalah hasil bagi banyaknya hasil dalam K dengan banyaknya percobaan.

Berdasarkan informasi di atas, proses menghitung peluang suatu kejadian dengan pendekatan nilai frekuensi relatif dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Misalkan suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali. Jika kejadian K muncul sebanyak k kali $(0 < k < n)$, maka frekuensi relatif munculnya kejadian K ditentukan dengan rumus:

$$f_r(K) = \frac{k}{n}$$

b. Jika n mendekati tak-hingga maka cenderung konstan mendekati nilai tertentu. Nilai tertentu ini adalah peluang munculnya kejadian K. Dengan demikian, peluang munculnya kejadian K ditentukan dengan rumus

$$P(K) = C,\ C \text{ konstanta}$$

Ingat!
Frekuensi relatif akan mendekati peluang jika percobaan dilakukan sebanyak mungkin.

2. Pengertian Percobaan, Kejadian, Titik Sampel dan Ruang Sampel

Perhatikan ilustrasi berikut ini!

Ilustrasi 12.1

Gambar 12.3 Lampu LED

Divisi *quality control* suatu perusahaan lampu ingin menguji coba kualitas produk lampu baru model *LED*. Dua kemungkinan hasil yang diperoleh pada percobaan ini adalah Buruk (R) dan Baik (B). Jika terdapat dua buah lampu yang yang akan diuji maka tentukanlah kemungkinan-kemungkinan hasil percobaan tersebut.

Penyelesaian

Pengambilan sebuah bola lampu, kemungkinan yang terjadi adalah Buruk (R) dan Baik (B).

Dalam sekali percobaan sekaligus, maka akan terdapat 4 kemungkinan yang akan terjadi, yaitu BB, RB, BR, dan RR. Kemungkinan-kemungkinan tersebut dinamakan anggota ruang sampel. Untuk menentukan ruang sampel dapat disajikan dengan beberapa cara sebagai berikut!

$$S = \{(R,R), (R,B), (B,R), (B,B)\} \text{ dengan } n(S) = 4.$$

Ilustrasi 12.2

Gambar 12.4
Putaran Menu Sarapan

Seorang koki menentukan menu sarapan siswa asrama sekolah dengan menggunakan putaran jarum jam. Kemungkinan hasil yang muncul pada satu percobaan pemutaran jarum jam tersebut adalah roti isi (R), nasi goreng (N), lontong sayur (L). dapatkah kamu menentukan kemungkinan hasi-hasil yang muncul untuk dua kali putaran?

Penyelesaian

Dari hasil satu kali pemutaran jarum jam, kemungkinan hasil percobaan tersebut adalah:

- $\{R\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan roti isi
- $\{N\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan nasi goreng
- $\{L\}$ merupakan kejadian munculnya menu sarapan lontong sayur.

Himpunan kemungkinan hasil dari pemutaran jarum jam dapat ditulis: $S = \{R,N,L\}$ dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 3$.

Dengan mendaftarkan setiap kemungkinan hasil yang muncul untuk dua kali percobaan pemutaran jarum jam dapat diperoleh:

$S = \{(R,R), (R,N), (R,L), (N,R), (N,N), (N,L), (L,R), (L,N), (L,L)\}$

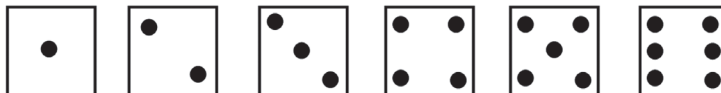
$n(S) = 9$

- Coba kamu perluas contoh di atas dengan menambahkan menu sarapan dan jumlah putaran jam! Hasil apa saja yang kamu peroleh? Diskusikan bersama teman kelompokmu!

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 12.1

Gambar 12.5
Dadu sisi enam

Pada kegiatan pelemparan sebuah dadu sisi enam, akan dihasilkan enam kemungkinan munculnya mata dadu. Kemungkinan-kemungkinan itu disajikan sebagai berikut.

Gambar 12.6 Hasil pelemparan sebuah dadu

Kegiatan melempar dadu disebut dengan **percobaan**. Enam kemungkinan hasil seperti yang disajikan pada Gambar 12.6 adalah semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan. Hasil munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 adalah titik-titik sampel. Jadi titik sampel adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan. **Ruang Sampel (*S*)** adalah suatu himpunan yang anggotanya adalah titik-titik sampel. Adapun yang menjadi ruang sampel dari hasil pelemparan sebuah dadu adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Kejadian (E) merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Pada percobaan pelemparan satu buah dadu sisi enam kejadian-kejadiannya adalah

- $\{1\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 1.
- $\{2\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 2.
- $\{3\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 3.
- $\{4\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 4.
- $\{5\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 5.
- $\{6\}$ merupakan kejadian muncul mata dadu 6.

Perhatikan ilustrasi berikut ini!

Gambar 12.7 Dua dadu

Pada kegiatan pelemparan dua dadu sekaligus, akan dihasilkan 36 kemungkinan munculnya pasangan mata dadu. Kemungkinan-kemungkinan itu disajikan pada tabel ruang sampel dari hasil pelemparan dua dadu, sebagai berikut:

Tabel 12.5 Ruang Sampel dari Hasil Pelemparan Dua Dadu

Dadu (I\II)	1	2	3	4	5	6
1	{1,1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{1,6}
2	{2,1}	{2,2	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{2,6}
3	{3,1}	{3,2}	{3,3}	{3,4}	{3,5}	{3,6}
4	{4,1}	{4,2}	{4,3}	{4,4}	{4,5}	{4,6}
5	{5,1}	{5,2}	{5,3}	{5,4}	{5,5}	{5,6}
6	{6,1}	{6,2}	{6,3}	{6,4}	{6,5}	{6,6}

Kegiatan melempar dua dadu di atas disebut dengan **percobaan**. Banyak hasil yang mungkin terjadi adalah 36. Jadi banyak titik sampelnya 36 buah. Himpunan dari semua kejadian yang mungkin terjadi atau himpunan dari semua titik-titik sampel dinamakan **Ruang Sampel (*S*)**. Kejadian (*K*) merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Misalnya kejadian (*K*) adalah muncul mata dadu pertama dan kedua yang jika dijumlahkan hasilnya adalah 6. Kemungkinan pasangan mata dadu yang muncul dengan jumlah 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1). Jadi kejadian (*K*) dapat ditulis $K = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

3. Cara Penyajian dan Penentuan Ruang Sampel

Masalah-12.3

Seorang raja ingin memberikan hadiah kepada pengawalnya yang sudah mengabdi dengan baik selama 30 tahun. Raja tersebut memiliki uang sebesar 60 milyar rupiah. Jumlah uang yang akan diberikan tergantung pilihan pengawal dari hasil pelemparan dua buah koin sekaligus sebanyak 30 kali pelemparan. Jika pilihan pengawal tersebut adalah munculnya dua gambar (*GG*) atau dua angka (*AA*) maka pengawal tersebut mendapat hadiah 1 milyar rupiah dalam satu kali pelemparan. Jika pilihan pengawal adalah munculnya angka dan gambar (*AG*) atau gambar dan angka (*GA*) sebanyak 15 kali dari 30 pelemparan maka pengawal memperoleh hadiah 25 milyar. Agar pengawal mendapat uang yang lebih banyak, mana yang menjadi pilihan pengawal tersebut dan berapa maksimal uang yang ia peroleh.

Coba selesaikan masalah di atas setelah mempelajari hal berikut.

Masalah-12.4

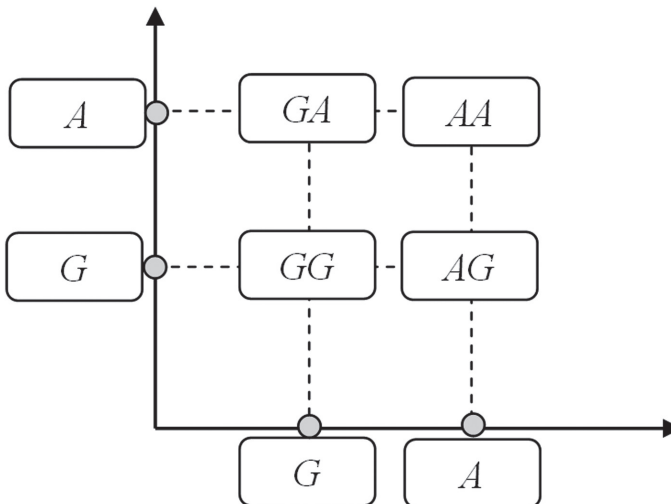
Dalam sekali pelemparan dua buah koin, maka akan terdapat 3 kemungkinan yang akan terjadi, yaitu *AA*, *AG*, *GA*, dan *GG*. Kemungkinan-kemungkinan tersebut dinamakan anggota ruang sampel. Untuk menentukan ruang sampel dapat disajikan sebagai berikut!

Terdapat empat kemungkinan hasil yang muncul pada suatu pelemparan dua koin, yaitu:

- Koin I muncul *A*, dan koin II muncul *A*.
- Koin I muncul *A*, dan koin II muncul *G*.
- Koin I muncul *G*, dan koin II muncul *A*.
- Koin I muncul *G*, dan koin II muncul *G*.

Gambar 12.8 Dua koin

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan diagram kartesius dapat diinterpretasikan cara penyajian kemungkinan hasil tersebut, yaitu sebagai hasil pemetaan dua titik yang berurutan pada sumbu absis dan ordinat, yaitu:

Gambar 12.9 Diagram kartesius ruang sampel dua koin

Karena ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin maka dari pelemparan dua koin sekaligus diperoleh $S = \{(A,A), (A,G), (G,A), (G,G)\}$ dengan $n(S) = 4$. Misalkan kejadian K adalah munculnya hanya satu sisi angka maka

$K = \{(A,G), (G,A)\}$ dengan $n(K) = 2$.

Masalah-12.5

Suatu kotak berisi 4 kelereng merah dan 2 kelereng biru. Dilakukan percobaan dengan mengambil 2 kelereng sekaligus. Dapatkah kamu menentukan kemungkinan hasil yang diperoleh 1 bola merah dan 1 bola biru dari percobaan tersebut? Jika kejadian *K* adalah munculnya dua kelereng merah sekaligus maka tentukanlah kemungkinan hasil dalam kejadian *K*.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan keempat kelereng merah disimbolkan dengan M_1, M_2, M_3, M_4, dan dua kelereng biru disimbolkan B_1, B_2 maka dengan menggunakan cara tabulasi (tabel) dapat dituliskan seluruh kemungkinan hasil yang muncul dari pengambilan dua kelereng sekaligus sebagai berikut:

Tabel 12.6 Tabel Kemungkinan Hasil Pencabutan Kelereng

Kelereng	M_2	M_3	M_4	B_2	B_2
M_1	(M_1, M_2)	(M_1, M_3)	(M_1, M_4)	(M_1, B_1)	(M_1, B_2)
M_2	–	$(M_2 M_3)$	$(M_2 M_4)$	$(M_2 B_1)$	$(M_2 B_2)$
M_3	–	–	$(M_3 M_4)$	$(M_3 B_1)$	$(M_3 B_2)$
M_4	–	–	–	$(M_4 B_1)$	$(M_4 B_2)$
M_5	–	–	–	–	$(M_5 B_2)$
M_6	–	–	–	–	–

dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 15$.
Kejadian *K* adalah munculnya kelereng merah sekaligus diperoleh:
$K = \{(M_1,M_2), (M_1,M_3), (M_1,M_4), (M_2,M_3), (M_2,M_4), (M_3,M_4)\}$
dengan banyak anggota kejadian $n(K) = 6$.

Masalah-12.6

Suatu kotak berisi 4 kelereng merah dan 2 kelereng hijau. Dilakukan percobaan dengan mengambil 3 kelereng sekaligus. Tentukanlah:

a. Kemungkinan kejadian K_1 adalah munculnya dua kelereng merah dan satu kelereng hijau.

b. Kemungkinan kejadian K_2 adalah munculnya tiga kelereng merah sekaligus

c. Kemungkinan K_3 hasil yang diperoleh paling sedikit 2 bola merah dari percobaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan keempat kelereng merah disimbolkan dengan M_1, M_2, M_3, M_4, dan dua kelereng hijau disimbolkan H_1, H_2 maka dengan cara mendaftar diperoleh kemungkinan hasil yang muncul pada percobaan di atas, yaitu:

$S = \{(M_1,M_2,M_3), (M_1,M_2,M_4), (M_1,M_2,H_1), (M_1,M_2,H_2), (M_1,M_3,M_4), (M_1,M_3,H_1), (M_1,M_3,H_2), (M_1,M_4,H_1), (M_1,M_4,H_2), (M_1,H_1,H_2), (M_2,M_3,M_4), (M_2,M_3,H_1), (M_2,M_3,H_2), (M_2,M_4,H_1), (M_2,M_4,H_2), (M_2,H_1,H_2), (M_3,M_4,H_1), (M_3,M_4,H_2), (M_3,H_1,H_2), (M_4,H_1,H_2)\}$

dengan banyak anggota ruang sampel $n(S) = 20$.

a. Kejadian K_1 adalah munculnya dua kelereng merah dan satu kelereng hijau sekaligus diperoleh:

$K_1 = \{(M_1,M_2,H_1), (M_1,M_2,H_2), (M_1,M_3,H_1), (M_1,M_3,H_2), (M_1,M_4,H_1), (M_1,M_4,H_2), (M_2,M_3,H_1), (M_2,M_3,H_2), (M_2,M_4,H_1), (M_2,M_4,H_2), (M_3,M_4,H_1), (M_3,M_4,H_2)\}$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_1) = 12$.

b. Kejadian K_2 adalah munculnya tiga kelereng merah sekaligus diperoleh:

$K_2 = \{(M_1,M_2,M_3), (M_1,M_2,M_4), (M_1,M_3,M_4), (M_2,M_3,M_4)\}$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_2) = 4$.

c. Kejadian K_3 adalah munculnya paling sedikit dua kelereng mereah diperoleh:

$K_3 = \{(M_1,M_2,H_1), (M_1,M_2,H_2), (M_1,M_3,H_1), (M_1,M_3,H_2), (M_1,M_4,H_1), (M_1,M_4,H_2), (M_2,M_3,H_1), (M_2,M_3,H_2), (M_2,M_4,H_1), (M_2,M_4,H_2), (M_3,M_4,H_1), (M_2,M_4,H_2)$
$\{(M_1,M_2,M_3), (M_1,M_2,M_4), (M_1,M_3,M_4), (M_2,M_3,M_4)\}$

dengan banyak anggota kejadian $n(K_3) = 16$.

- *Memberi kesempatan kepada siswa untuk menyelesaikan latihan dalam kelompok belajar. Minta salah satu kelompok untuk menyajikan hasil kerjanya di depan kelas dan minta siswa pada kelompok lain untuk mengkritisi hasil kerja kelompok penyaji dan menjembatani perbedaan pola pikir antar kelompok.*

Latihan 12.2

1. Pada pelemparan dua buah dadu, K merupakan kejadian munculnya mata dadu yang jumlahnya lebih besar sama dengan dua., tentukanlah kejadian K?
2. Mungkinkah suatu kejadian sama dengan ruang sampel.
3. Dapatkah kamu temukan kejadian diluar K? Jelaskan.
4. Untuk percobaan-percobaan di atas, cara penyajian ruang sampel dan titik sampel manakah yang lebih baik? Berikan alasan!

Dari pola yang terbentuk dalam penentuan banyaknya anggota ruang sampel menggunakan 1, 2, dan 3 objek percobaan seperti koin dan dadu kita dapat mengetahui berapa banyak anggota ruang sampel dengan menggunakan n objek percobaan. Perhatikan pola yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 12.7 Tabel Penentuan Anggota Ruang Sampel

Banyak Objek	Banyak anggota ruang sampel $n(S)$	
	Koin	Dadu
1	$2 = 2^1$	$6 = 6^1$
2	$4 = 2^2$	$36 = 6^2$
3	$8 = 2^3$	$216 = 6^3$
⋮	⋮	⋮ ⋮
N	2^n	6^n

Secara umum, untuk menghitung banyaknya anggota ruang sampel dalam pelemparan n buah koin dan n buah dadu dapat ditulis sebagai berikut.

Sifat-1

1. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n koin adalah 2^n.
2. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n dadu adalah 6^n.

Masalah-12.7

Dhani melakukan percobaan dengan melambungkan tiga buah mata koin ke atas secara bersamaan. Tentukan ruang sampel dan banyak anggota ruang sampel.

Alternatif Penyelesaian

Dalam setiap pelemparan 3 buah koin sekaligus, akan muncul tiga sisi koin. Kita daftar setiap kejadian yang mungkin yang terjadi dari satu kali pelemparan 3 koin sekaligus. Semua kemungkinan munculnya sisi koin adalah (A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), dan (G,G,G). Dengan demikian ruang sampel percobaan tersebut adalah
$S = \{(A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), (G,G,G)\}$.
Banyak anggota ruang sampel adalah $n(S) = 8$.

Masalah-12.8

Tiga dadu yang berbeda warna, yakni merah, biru, dan kuning dilempar bersama-sama. Hitunglah banyak kemungkinan hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu yang muncul adalah 8?

Alternatif Penyelesaian

Pandang satu dadu, yaitu dadu merah. Ada beberapa kemungkinan hasil yang akan muncul agar jumlah 3 mata dadu adalah 8. Berbagai kemungkinan hasil yang terjadi disajikan sebagai berikut.

- Jika dadu merah muncul angka 1 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 7. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), dan (6,1).
- Jika dadu merah muncul angka 2 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 6. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) dan (5,1).
- Jika dadu merah muncul angka 3 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 5. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,4), (2,3), (3,2), dan (4,1).
- Jika dadu merah muncul angka 4 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 4. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,3), (2,2), dan (3,1).

- Jika dadu merah muncul angka 5 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 3. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,2) dan (2,1).
- Jika dadu merah muncul angka 6 maka mata dadu biru dan kuning harus berjumlah 2. Kemungkinan hasil mata dadu biru dan kuning yang muncul adalah (1,1).

Jadi, banyak kemungkinan hasil yang terjadi dalam pelemparan 3 buah dadu secara bersama-sama dengan syarat jumlah ketiga mata dadu yang muncul 8 adalah $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.
Coba selesaikan dengan cara yang lain!

- *Ujilah pemahaman siswa dengan mengajukan soal latihan berikut.*

Latihan 12.3

Tentukanlah banyak kemungkinan hasil yang terjadi dari hasil pelemparan 3 dadu dengan syarat jumlah ketiga mata dadu yang muncul adalah 9.

Berdasarkan berbagai informasi yang diperoleh dari hasil percobaan di atas, kita tetapkan definisi titik sampel, ruang sampel, dan kejadian sebagai berikut.

Definisi 12.2

1. Titik sampel adalah hasil yang mungkin dari sebuah percobaan.
2. Ruang sampel (S) adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.
3. Kejadian (K) adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Berdasarkan definisi titik sampel ruang sampel di atas, kita tetapkan definisi peluang suatu kejadian sebagai berikut.

Definisi 12.2

Peluang suatu kejadian *A* adalah hasil bagi banyak hasil dalam *A* dengan banyak anggota ruang sampel dari suatu percobaan, ditulis:

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)}$$

$n(A)$: Banyak titik sampel dalam A.
$n(S)$: Banyak anggota ruang sampel.

Masalah-12.9

Dalam pelemparan dua dadu sekaligus, tentukan peluang munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 1, 2, 3, 4, …, 12. Kemudian tentukan juga peluang munculnya dua mata dadu yang jumlahnya lebih dari atau sama dengan 2 dan kurang dari atau sama dengan 12.

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan mendaftar nilai peluang dari semua kemungkinan yang terjadi dan hasil penjumlahan dua mata dadu yang muncul, disajikan tabel sebagai berikut.

Tabel 12.8 Peluang Penjumlahan Dua Dadu

Jumlah	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumlah Dua Mata Dadu yang Muncul	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Peluang	$\frac{0}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Jumlah dua mata dadu yang muncul (x), dengan $2 \leq x \leq 12$	36											
Peluang	$\frac{36}{36} = 1$											

Masalah-12.10

Di awal pertandingan olah raga kartu bridge, seorang pemain mencabut sebuah kartu untuk mendapatkan kartu as untuk menjadi tambahan nilainya. Jika dalam satu set kartu bridge ingin dicabut kartu as sekop (lihat Gambar 12.10). Tentukan nilai ruang sampel dan nilai peluang terambilnya kartu as sekop! Berapa peluang terambilnya kartu bernomor 10?

Gambar 12.10 Kartu Bridge

Alternatif Penyelesaian

Pada percobaan menggunakan satu set kartu bridge terdapat empat jenis kartu, yakni: wajik (♦), hati (♥), klaver (♣), dan sekop (♠).

Jika dimisalkan wajik = W; hati = H; klaver = K; dan sekop = S maka ruang sampel dari satu set kartu bridge adalah:

S = {(ks), (qs), (js), (10s), (9s), (8s), (7s), (6s), (5s), (4s), (3s), (2s), (ass), (kk), (qk), (jk), (10k), (9k), (8k), 7k), (6k), (5k), (4k), (3k), (2k), (ask), (kh), (qh), (jh), (10h), (9h), (8h), (7h), (6h), (5h), (4h), (3h), (2h), (ash), (kw), (qw), (jw), (10w), (9w), (8w), (7w), (6w), (5w), (4w), (3w), (2w), (asw)}

Misal K_1 adalah pengambilan kartu *as* sekop, maka diperoleh K_1 = {(ass)} sehingga $n(K_1) = 1$.

Jadi, peluang terambilnya kartu as sekop adalah:

$$P = (K_1) = \frac{n(K_1)}{n(S)} = \frac{1}{52}$$

Misal E_2 adalah pengambilan kartu bernomor 10, maka diperoleh K_2 = {(10w), (10h), (10k), (10s)}, sehingga $n(K_2) = 4$

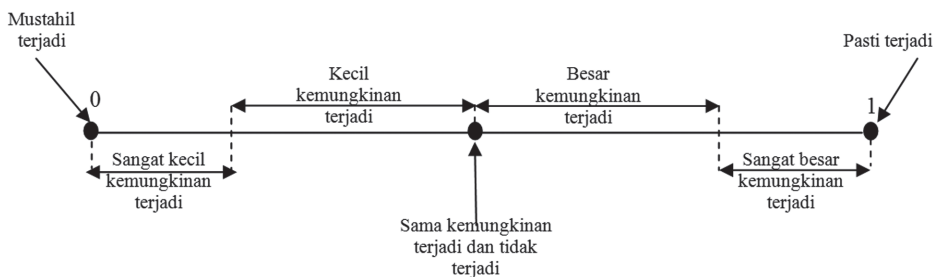
Jadi, peluang terambilnya kartu bernomor 10 adalah:

$$P = (K_2) = \frac{n(K_2)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Berdasarkan berbagai pemecahan masalah penentuan nilai peluang suatu kejadian yang telah diuraikan di atas, maka nilai peluang suatu kejadian dapat dipastikan terletak pada interval [0, 1]. Kita tetapkan sifat nilai peluang sebagai berikut.

Sifat-3

Misalkan K suatu kejadian dan S adalah ruang contoh dalam sebuah percobaan.
1. Peluang kejadian K memenuhi $P(K)$, $0 \leq P(K) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(\varnothing) = 0$

Peluang suatu kejadian adalah 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti terjadi dan peluang kejadian adalah 0 berarti bahwa kejadian tersebut mustahil terjadi. Peluang tersebut dapat diinterpretasikan pada gambar berikut.

Gambar 12.11 Interpretasi peluang

Contoh 12.2

Contoh sederhana kejadian yang pasti terjadi adalah kejadian munculnya angka mata dadu kurang dari 7 dalam pelambungan mata dadu adalah 1. Kejadian ini pasti terjadi. Sudahkah tahu kamu alasannya? Jelaskan!

Penyelesaian

Misalkan A, B adalah kejadian dan S adalah ruang sampel dari suatu percobaan. Buktikan jika $A, B \subseteq S$ maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:

Ingat kembali materi himpunan yang telah dipelajari di SMP. Kita telah pelajari operasi gabungan dan irisan dua himpunan. Kita ketahui bahwa

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$= P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

Latihan 12.4

Untuk semua kejadian A_1, A_2, A_3, ... dimana $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Buktikan bahwa

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)!$$

Uji Kompetensi 12.1

1. Ambil sebuah paku payung sebagai percobaan, lempar hingga jatuh ke lantai. Dapatkah kamu menentukan ruang sampel dan titik sampelnya? Adakah kamu temukan? Jelaskan.
2. Dua buah dadu dilemparkan dan menghasilkan bilangan prima pada salah satu mata dadu. Buatlah ruang sampel beserta titik sampelnya!
3. Jika sebuah dadu dan sebuah mata koin dilemparkan secara bersamaan. Dengan menggunakan diagram pohon tentukan ruang sampel percobaan tersebut?
4. Luna ingin menghadiri sebuah pesta, ia memiliki baju blus bunga kotak-kotak dan bergaris untuk pasangan rok berwarna biru tua, coklat, dan putih. hitunglah berapa banyak pasangan pakaian yang dapat dipakai Luna jika ia juga membeli blus motif polos?
5. Lambungkan tiga mata dadu secara bersamaan, tentukanlah ruang sampel dari tiga buah dadu tersebut !
6. Menu minuman hari ini di rumah makan Minang adalah teh, kopi, dan jus. Sedangkan menu makanan berupa nasi rendang, nasi ayam, nasi rames, dan nasi kebuli. Berapa banyak pilihan yang dapat dipesan oleh pengunjung? Sajikan dalam diagram pohon.
7. Dari kota Bekasi ke kota Depok dilayani oleh 4 bus dan dari Depok ke Bogor oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota Bekasi ke kota Bogor melalui Depok kemudian kembali lagi ke Bekasi juga melalui Depok. Jika saat kembali dari Bogor ke Bekasi, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka banyak cara perjalanan orang tersebut?

8. Dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 7 akan dibentuk bilangan dengan 4 angka dan tidak boleh ada angka yang diulang.
   a. Berapa banyak bilangan dapat dibentuk?
   b. Berapa banyak bilangan ganjil yang dapat dibentuk?
   c. Berapa banyak bilangan yang nilainya kurang dari 5.000 yang dapat dibentuk?
9. Anggap satu tahun 365 hari. jika 20 orang dipilih secara acak, maka peluang ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah. . .
10. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 warna hitam, 6 warna putih dan 7 warna hijau. jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah ....
11. Lima orang akan pergi ke pantai menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa jadi sopir, maka banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka di dalam mobil adalah ....

Projek

Rancanglah minimal lima buah masalah dan terapankan konsep dan prinsip peluang dalam pemecahannya. Masalah tersebut dirancang dari dunia nyata di sekitarmu. Buatlah laporan dan sajikan hasilnya di depan kelas.

4. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Masalah-12.11

Pada pelemparan sebuah dadu, tentukan peluang muculnya angka ganjil pada dadu, melalui penentuan peluang munculnya angka genap pada dadu!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan K adalah kejadian munculnya angka genap pada dadu dan K^c adalah kejadian munculnya angka ganjil pada dadu. Dengan demikian $K = \{2,4,6\}$ dan $K^c = \{1,3,5\}$.

Peluang kejadian K adalah $P(K) = \dfrac{n(K)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ =

Sedangkan peluang kejadian K^c adalah $P(K^c) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Masalah-12.12

Tentukanlah peluang munculnya dadu yang berjumlah kurang dari atau sama dengan 10 pada pelemparan 2 dadu.

Alternatif Penyelesaian

Sebelumnya telah kita ketahui banyaknya anggota ruang sampel dalam pelemparan 2 mata dadu adalah 36. Kemungkinan munculnya mata dadu yang berjumlah kurang atau sama dengan 10, yaitu jumlah dua mata dadu yang hasilnya 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

Misalkan K adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya kurang dari atau sama dengan 10 dan K^c adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang berjumlah lebih dari 10, yaitu jumlah dua mata dadu adalah 11 dan 12. Kemungkinan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 11 dan 12 adalah $K^c = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$ atau $n(K^c) = 3$.

Jadi, $P\left(K^c\right) = \frac{n\left(K^c\right)}{n\left(S\right)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

karena $P\left(K\right) = 1 - P\left(K^c\right)$

$$P\left(K\right) = 1 - \frac{1}{12}$$

$$P\left(K\right) = \frac{11}{12}$$

Jadi, peluang munculnya angka mata dadu yang berjumlah kurang dari atau sama dengan 10 adalah $\frac{11}{12}$.

Dari hasil pemecahan kedua masalah di atas, ternyata jumlah peluang kejadian K dan peluang kejadian bukan K atau K^c adalah 1. Secara matematis kita dapat rumuskan bahwa:

Sifat-1

Misalkan K suatu kejadian dari sebuah percobaan, maka $P(K) + P(K^c) = 1$ atau $P(K) = 1 - P(K^c)$

Untuk lebih mendalami sifat di atas, perhatikan masalah berikut!

Masalah-13

Putra melambungkan n dadu, kemudian ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah, agar peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6, peluangnya paling besar?

Alternatif Penyelesaian

Karena dadu yang dilambungkan bermata enam, maka jumlah setiap n mata dadu adalah kurang dari atau sama dengan enam ($n \leq 6$).

Misalkan D_n ={jumlah mata dadu 6, $n \leq 6$}, diperoleh:

$D_1 = \{6\}$

$D_2 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$D_3 = \{(1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (4,1,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

$D_4 = \{(1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,1,3,1), (1,3,1,1), (2,2,1,1), (2,1,2,1), (3,1,1,1), (3,2,1,1)\}$

$D_5 = \{(1,1,1,1,2), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,2,1)\}$

$D_6 = \{1,1,1,1,1,1\}$

Maka diperoleh peluangnya masing-masing:

- $P(D_1) = \dfrac{1}{6}$
- $P(D_2) = \dfrac{5}{6^2}$
- $P(D_3) = \dfrac{10}{6^3}$
- $P(D_4) = \dfrac{9}{6^4}$
- $P(D_5) = \dfrac{5}{6^5}$
- $P(D_6) = \dfrac{1}{6^6}$

Jadi, peluang terbesar munculnya jumlah mata dadu jumlahnya 6 adalah saat $n = 1$ dengan nilai peluangnya $\dfrac{1}{6}$.

Contoh 12.3

Misalkan A, B adalah kejadian dan S adalah ruang sampel dari suatu percobaan. Buktikan jika $A, B \subseteq S$ maka $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Penyelesaian

Ingat kembali materi himpunan yang telah dipelajari di SMP. Kita telah pelajari operasi gabungan dan irisan dua himpunan. Kita ketahui bahwa

$$\begin{aligned} n\left(B \cup A^c\right) &= n(B) + n(A^c) - n\left(B \cap A^c\right) \\ &= n(B) + n(S) - n(A) - n\left(B \cap A^c\right) \\ &= n(B) + n(S) - \left(n(A) + n\left(B \cap A^c\right)\right) \\ &= n(B) + n(S) - \left(n(A) + n(B) - n(A \cap B)\right) \\ &= n(B) + n(S) - n(A \cup B) \end{aligned}$$

1) Jika kejadian A saling lepas dengan kejadian B, maka $A \cap B = \varnothing$
2) Jika kejadian A tidak saling lepas dengan kejadian maka $A \cap B \neq \varnothing$

Dengan demikian $n(B \cap A^c) = n(B) - n(A \cap B)$

$$\begin{aligned} P(B \cap A^c) &= \frac{n\left(B \cup A^c\right)}{n(S)} \\ &= \frac{n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Jadi, $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Uji Kompetensi 12.2

1. Setelah lulus SMA, mungkin sebagian dari anda berniat melanjutkan ke tingkat yang lebih tinggi yakni perguruan tinggi. Jika anda memilih sebuah jurusan pada PTN selain mempertimbangkan minat dan bakat, Anda perlu juga mempertimbangkan kemungkinan masuk jurusan tersebut. Dengan membandingkan data sebelumnya mengenai banyaknya orang yang memilih jurusan tersebut dengan daya tampungnya menjadi salah satu triknya. Misalkan, Anda akan memilih jurusan A dan B. Jurusan A pada tahun sebelumnya dipilih oleh 3432 orang dan daya tampungnya 60. Adapun jurusan B dipilih oleh 2897 dengan daya tampung 50. Jurusan manakah peluang anda lulus lebih besar?
2. Tiga mata dadu dilemparkan secara bersamaan. Jika E adalah kejadian jumlah tiga mata dadu >10.
   - Berapakah peluang kejadian K?
   - Hitunglah Peluang diluar kejadian K?
3. Nomor plat kendaraan terdiri dari empat digit angka, Misalkan K kejadian no plat merupakan bilangan berulang. tentukan peluang K.
4. Ahok, Badu, Carli, dan Dido akan berfoto bersama secara berdampingan. Hitung peluang Ahok dan Carli selalu berdampingan?
5. Peluang seorang pemain basket akan melempar bola tepat masuk ring 0,7. Jika ia melempar sebanyak 70 kali, hitunglah kemungkinan banyaknya bola yang tepat masuk ring?
6. Kelas XIIA terdiri dari 10 murid laki-laki dan 20 murid perempuan. Setengah dari jumlah murid laki-laki dan setengah dari jumlah murid perempuan berambut keriting. Apabila seorang murid dipilih secara acak untuk mengerjakan soal, Berapakah peluang bahwa murid yang terpilih itu laki-laki atau berambut keriting?
7. Jika sebuah dadu dilempar 5 kali. Berapakah peluang mata dadu yang muncul selalu ganjil?
8. Tetangga baru yang belum anda kenal katanya mempunyai 2 anak. Anda tahu salah satunya adalah laki-laki. Hitung Peluang kedua anak tetangga baru anda semuanya laki-laki?
9. Dalam sebuah klinik dokter spesialis kandungan terdapat enam pasang suami-isteri. Jika dipilih dua orang secara acak dari ruangan tersebut, maka peluang terpilihnya dua orang tersebut suami-isteri?
10. Dua puluh tiket diberi nomor dari 1 sampai dengan 20. Setiap tiket diambil secara acak dan punya peluang yang sama untuk terpilih.

Berapa probabilitas bahwa tiket yang terpilih ialah tiket dengan nomor berkelipatan 3 atau 5?

11. Anggap satu tahun 365 hari. jika 20 orang dipilih secara acak, maka peluang ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah. . .

12. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 warna hitam, 6 warna putih dan 7 warna hijau. jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah ....

Projek

Himpun minimal lima sifat peluang dari berbagai sumber (internet, buku, dan sumber lain). Buktikan kelima sifat tersebut dan buatlah laporan hasil kerjamu serta sajikan di dalam kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep peluang di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. *Frekuensi relatif* dari suatu kejadian dalam suatu percobaan adalah perbandingan banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu percobaan dengan banyaknya percobaan dilakukan. Ditulis

   $$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Banyak kejadian yang muncul}}{\text{Banyak percobaan}}$$

2. Titik sampel adalah semua kejadian yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan.
3. Ruang sampel (S) adalah suatu himpunan yang anggotanya semua kejadian yang mungkin terjadi dalam percobaan atau suatu himpunan yang anggotanya titik-titik sampel.
4. Kejadian (K) adalah himpunan bagian dari ruang sampel S.
5. Ada beberapa cara untuk menyajikan semua kejadian yang mungkin muncul dalam suatu percobaan, yaitu: cara mendaftar, menggunakan diagram cartesisus, menggunakan tabel, dan menggunakan diagram pohon.
6. Peluang suatu kejadian K adalah hasil bagi banyaknya kemungkinan kejadian K terjadi dengan banyaknya anggota ruang sampel dari suatu percobaan, dirumuskan: $P(K) = \dfrac{n(K)}{n(S)}$, dimana $n(K)$ adalah banyaknya kejadian K yang terjadi dan $n(S)$ adalah banyak anggota ruang sampel suatu percobaan.
7. Peluang sebuah kejadian K tepat berada diantara nol dan satu, ditulis dengan: $0 \leq P(K) \leq 1$. Artinya jika peluang sebuah kejadian K adalah 0 maka kejadian K tidak terjadi, sedangkan jika peluang kejadian K adalah 1 maka kejadian K pasti terjadi.
8. Jika K merupakan sebuah kejadian, maka kejadian yang berada di luar K adalah seluruh kejadian yang tidak terdaftar di K, disebut komplemen dari kejadian K, disimbolkan dengan K^c.
9. Jika K suatu kejadian dalam sebuah percobaan, maka jumlah nilai peluang kejadian K dan nilai peluang kejadian komplemen K adalah 1, ditulis $P(K) + P(K^c) = 1$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar peluang secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

PETUNJUK TEKNIS PELAKSANAAN REMEDIAL DAN PENGAYAAN

A. Pengertian dan Prosedur Pelaksanaan Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

Pengertian dan Prosedur Pelaksanaan Pembelajaran Remedial dan Pengayaan Kurikulum Matematika 2013 adalah kurikulum berbasis kompetensi dengan pendekatan pembelajaran tuntas. Pembelajaran tuntas (*mastery learning*) dalam proses pembelajaran berbasis kompetensi dimaksudkan adalah pendekatan dalam pembelajaran yang mempersyaratkan peserta didik menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pokok bahasan atau mata pelajaran tertentu. Peserta didik dikatakan menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pada pokok bahasan atau mata pelajaran matematika pada kelas tertentu, apabila peserta didik tersebut memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi lebih besar atau sama dengan dari Kriteria Ketuntasan Minimum (≥ KKM) yang ditetapkan dalam kurikulum. Sebaliknya peserta didik dikatakan tidak tuntas.

Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran remedial. Pembelajaran remedial pada hakikatnya adalah pemberian bantuan bagi peserta didik yang mengalami kesulitan atau kelambatan belajar. Bantuan dalam pembelajaran remedial mencakup (1) mengkaji ulang materi pada kompetensi dasar yang belum dicapai peserta didik, (2) pemberian tugas tersrtuktur yang dilakukan secara mandiri dan pemberian feetback atas hasil kerja peserta didik, (3) tutor sebaya dalam implementasi model pembelajaran koperatif tipe jigsaw, dan (4) kerjasaman sekolah dengan orang tua/wali peserta didik mengatasi masalah belajar peserta didik. Pemberian pembelajaran remedial meliputi dua langkah pokok, yaitu pertama mendiagnosis kesulitan belajar dan kedua memberikan perlakuan (*treatment*) pembelajaran remedial.

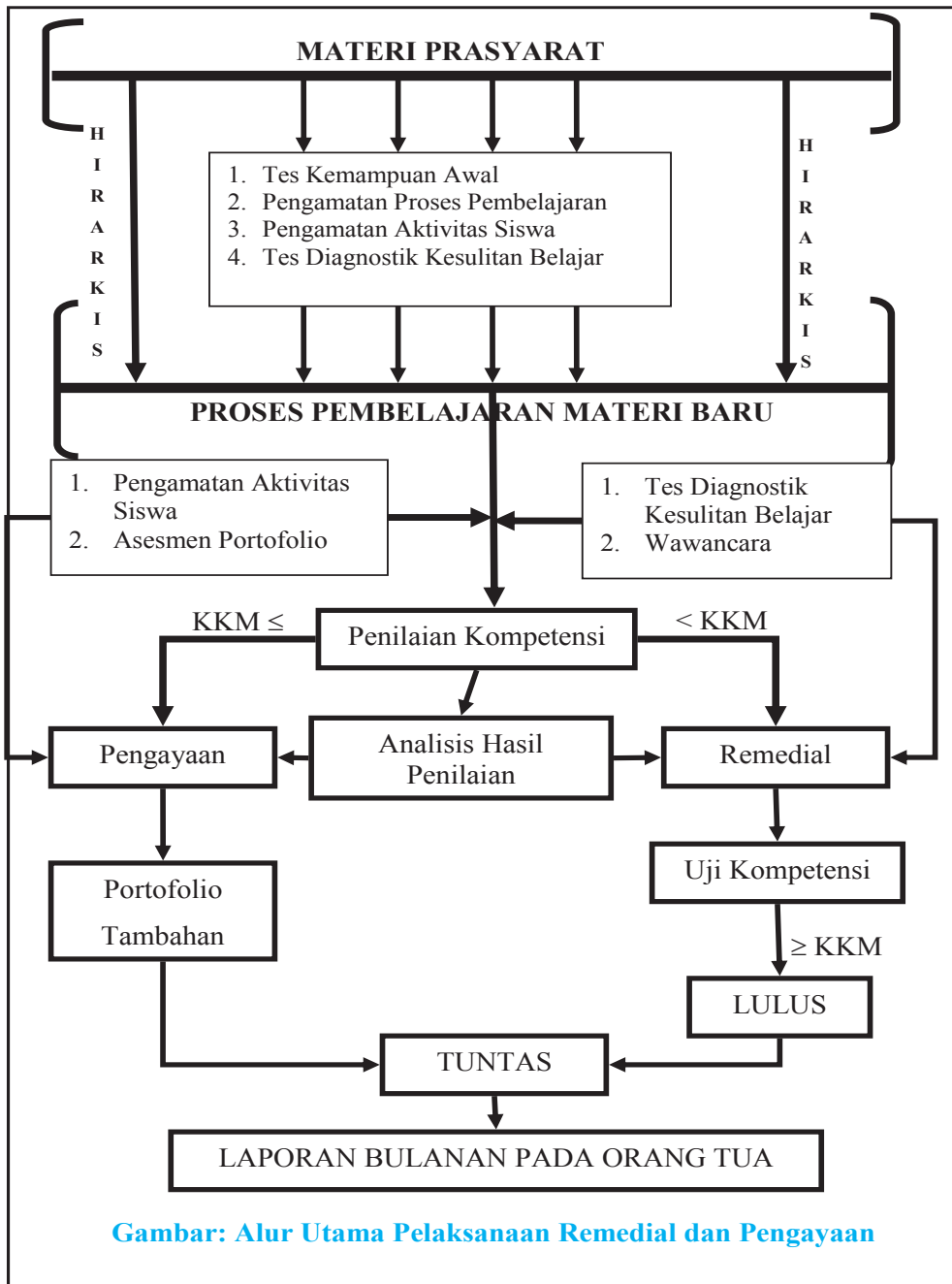
Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran pengayaan. Pembelajaran pengayaan adalah pembelajaran yang memberikan pengalaman (membangun berpikir tingkat tinggi, yaitu berpikir kritis dan kreatif) lebih mendalami materi terkait kompetensi atau kegiatan peserta didik yang melampaui persyaratan minimal yang ditentukan oleh kurikulum dan tidak semua peserta didik dapat melakukannya. Pendekatan pembelajaran yang diterapkan dalam pelaksanaan pengayaan melalui (1) pembelajaran berbasis masalah dan proyek untuk melatih peserta didik berpikir kritis dan kreatif, ketangguhan diri beradaptasi dan

memecahkan masalah, (2) pemberian asesmen portofolio tambahan berbasis masalah, proyek, keterampilan proses, chek up diri dan asesmen kerjasama kelompok, dan (3) pemanfaatan IT dan ICT dalam proses pembelajaran.

Untuk mengukur penguasaan kompetensi perlu dikembangkan suatu penilaian yang mencakup seluruh kompetensi dasar pada pokok bahasan tertentu atau pada satu mata pelajaran matematika dengan menggunakan indikator yang telah ditetapkan oleh pendidik. Penilaian terhadap hasil pembelajaran menggunakan sistem penilaian patokan dan berkelanjutan dalam arti semua indikator ditagih, kemudian hasilnya dianalisis untuk menentukan kompetensi dasar yang telah dikuasai dan belum dikuasai serta mengetahui kesulitan belajar peserta didik. Apabila peserta didik belum tuntas menguasai suatu kompetensi dasar harus mengikuti proses pembelajaran remedial kemudian dilakukan penilaian ulang untuk mengukur pencapaian kompetensi.

Seluruh hasil belajar siswa yang tampak pada hasil penilaian/uji kompetensi dan asesmen otentik/portofolio dijadikan bahan kajian guru, guru konseling, dan kepala sekolah. Hasil belajar tersebut dilaporkan kepada pemangku kepentingan (terutama pada orang tua) setiap bulannya.

Secara garis besar, alur utama pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan disajikan pada skema berikut.

Gambar: Alur Utama Pelaksanaan Remedial dan Pengayaan

B. Tujuan Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

Pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan bertujuan untuk

1. Mencapai ketuntasan belajar peserta didik mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan pada kurikulum matematika 2013, baik secara individu maupun klasikal.
2. Mengatasi kesulitan belajar siswa untuk mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan pada kurikulum matematika 2013 dengan ukuran melewati Kriteria Ketuntasan Minimal (KKM).
3. Memberikan penglaman belajar dan keterampilan berpikir yang lebih mendalam dan lebih luas terkait kompetensi dasar yang ditetapkan pada kurikulum matematika 2013.

C. Soal untuk Penilaian Kompetensi Siswa

Guru matematika di sekolah dapat berkoordinasi dengan teman guru di Musyawarah Guru Mata Pelajaran Matematika atau mengembangkan sendiri soal yang akan digunakan untuk penilaian/uji kompetensi diakhir setiap bab (bahasan)i pada buku siswa atau buku guru.

Soal yang dikembangkan dari sisi ranah kognitif dan psikomotor (keterampilan aplikasi matematika dan koneksi matematika dengan dunia nyata, bidang ilmu lain, dan dalam matematika sendiri) harus mewakili indikator kopetensi dasar yang akan dicapai. Sebagai alternatif soal yang akan diujikan untuk penilaian/uji kompetensi pada setiap bab (bahasan) disajikan sebagai berikut.

1. Soal untuk Penilaian/Uji Kompetensi Pada Bab I

1.1 Sederhanakanlah $\left(\dfrac{36(x\times 2y)^2}{3x\times y^2}\right)^3 \div \left(\dfrac{12x(3y)^2}{9x^2y}\right)^2$.

1.2 Jumlah dua bilangan berturutan adalah 13. Tentukan jumlah pangkat tiga dari bilangan-bilangan tersebut.

1.3 Jika a dan b bilangan asli dan $a \leq b$ sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ bilangan rasional, maka pasangan (a,b) adalah ...

1.4 Salah satu rumus yang digunakan untuk menaksir populasi yang menempati suatu situs adalah $P = a^k$ dengan a luas (dalam are) dan k konstata. Sebuah situs purbakala memiliki luas 7000 are. Apabila nilai k untuk situs tersebut adalah 0.67, taksirlah jumlah penduduk yang ada di sekitar situs pada masa itu.

1.5 Jika ${}^{a}\log b = 4$, ${}^{c}\log b = 2$, dan a, b, c bilangan positif, $a,c \neq 1$, tentukan nilai dari $\left[{}^{a}\log\left(bc\right)^{4}\right]^{\frac{1}{2}}$!

1.6 Gambarkanlah grafik fungsi $f(x) = {}^{2}\log(x+2),\ x \in R\ dan\ x > 0$.

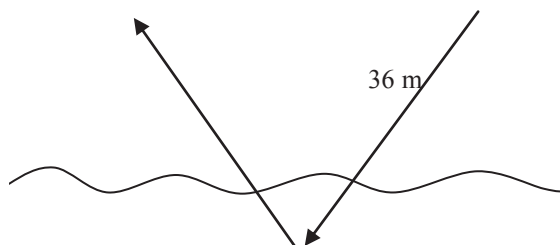
2. Soal untuk Penilaian/Uji Kompetensi Pada Bab II

2.1 Umur Ibu 2 tahun yang lalu adalah 1/3 kali umur Ibu pada c tahun yang akan datang dengan adalah bilangan bulat positif. Sekarang, umur Ibu adalah 21 tahun lebihnya dari 1/3 umurnya pada 5 tahun yang lalu. Tentukanlah berapa umur Ibu saat ini.

2.2 Gambarkanlah grafik fungsi $f(x) = |3x + 1|$, x bilangan real dan tentukan titik potongnya terhadap Sumbu-x.

2.3 Misalkan a dan b bilangan real. Buktikan $|a| = a$ dan $|a \times b| = |a| \times |b|$

2.4 Misalkan a, b, dan c bilangan real. Buktikan jika $|a| = |b|$ dan $|a + b| = |c|$ maka $|a| \leq |c|$.

2.5 Seekor burung camar laut dari ketinggian 28 meter melihat ikan pada jarak 25 m sehingga ia terbang menukik ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali ke angkasa seperti gambar.

Jika kita andaikan permukaan laut sebagai sumbu x maka fungsi pergerakan burung tersebut adalah $f(x) = |x - a| + b$ dengan a, b adalah bilangan real. Tentukanlah nilai a dan b tersebut.

3. Soal untuk Penilaian/Uji Kompetensi Pada Bab III

3.1 Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier $3x - 4y = 2$ dan $5x + 2y = 7$ dengan cara grafik dan determinan.

3.2 Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat

perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 inci, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut? (1 inci = 2, 54 cm).

3.3 Sebuah pabrik memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu.

3.4 Selidikilah apakah sistem persamaan linear berikut adalah homogen dan tentukan bilangan bulat yang memenuhi sistem persamaan linier berikut

$x + y + z = 0$

$7x + 3y - 5z = 0$

$-2x - y + \frac{3}{2}z = 0$

3.5 Misalkan p adalah jumlah maksimum dikurangi jumlah minimum dari himpunan penyelesaian yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear di bawah ini.

$2x + 5y \leq 600$

$4x + 3y \leq 530$

$2x + y \leq 240$

a) Gambarkanlah pertidaksamaan pada sistem linier tersebut.

b) Tentukanlah nilai p!

4. Soal untuk Penilaian/Uji Kompetensi Pada Bab IV

4.1 Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}$. Jika matriks $R^t = T$, maka tentukanlah nilai a, b, c, d, e, dan f!

4.2 Misalkan matriks $A_{3\times3}$. Buktikan $A \times A^{-1} = I$, dengan I matriks identitas perkalian matriks.

4.3 Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukanlah matriks A^{65}.

4.4 Sumarno memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP} yang harus digunakan para petani agar hasil panen padi lebih maksimal. Masing-masing harga per sak (satu karung) pupuk adalah Rp. 100.000,-; Rp. 120. 000,-; dan Rp. 200.000. Banyak pupuk yang dibutuhkan Sumarno sebanyak

40 sak (karung). Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Sumarno untuk membeli pupuk adalah Rp. 6.020.000,-. Berapa sak masing-masing jenis pupuk yang harus dibeli Sumarno. Selesaikan dengan menggunakan Determinan Matriks.

4.5 Sebuah matriks P ordo 2×2 dengan $P = 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a, b, c, d \in R$. Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$. Tentukanlah determinan dari matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sd \end{bmatrix}$ dengan $x \in R$.

4.6 Misalkan A dan B matriks berordo $n \times n$. Tunjukkan bahwa jika A adalah *invertible*, maka $\det B = \det(A^{-1} BA)$.

D. Bentuk Pelaksanaan Pembelajaran Remedial dan Pengayaan

1. Bentuk Pelaksanaan Pembelajaran Remedial

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

a. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu;

b. Jika jumlah peserta yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara kelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik dan meningkatkan kemampuan peserta didik mencapai kompetensi dasar tertentu;

c. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.

2. Bentuk Pelaksanaan Pembelajaran Pengayaan

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah otentik, proyek, keterampilan proses, chek up diri, dan asesmen kerjasama kelompok. Sebelum asesmen

ini dikembangkan terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik, misal belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Identifikasi kemampuan berlebih peserta didik dapat dilakukan, antara lain melalui: tes IQ, tes inventori, wawancara, pengamatan, dan sebagainya. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

E. Materi Pembahasan Dalam Pembelajaran Remedial

Materi pembahasan dalam pembelajaran remedial adalah materi (bahasan) terkait kompetensi dasar yang belum dicapai oleh siswa, dengan tolok ukur KKM yang ditetapkan. Tindakan-tindakan pada proses pembelajaran memberi perhatian pada pemahaman peserta didik dan mengatasi kesulitan belajar yang dialami siswa.

F. Materi Pembahasan Dalam Pembelajaran Pengayaan

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib yang tertera pada kurikulum matematika 2013, termasuk pengembagan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah otentik, proyek, keterampilan proses, chek up diri, dan asesmen kerjasama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerjasama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education)*. United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 –12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Soejadi, R. (2004). *Pembelajaran Matematika Realistik. Makalah.* Surabaya: Unesa.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally)*. United States of America: Allyn & Bacon.

Kangiran Marthen. (2010). *Matematika.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, 2011.

Siswanto, dkk. (2009). *Matematika Inovatif.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Depdiknas, 2009.

Ayu Kurniasih, Diah. (2009). *Matematika ke 2.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Depdikinas.

Sordijanto, Nugroho, dkk. (2009). *Matematika XI IPA.* Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.